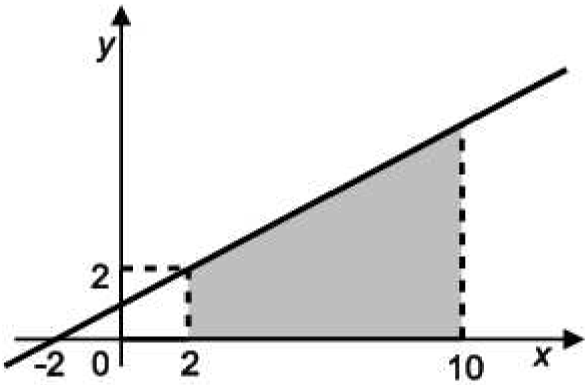
Zadania :

1. V pravouhlom trojuholníku má jedna odvesna dĺžku 6 cm. Dĺžka druhej odvesny je aritmetickým priemerom dĺžky prvej odvesny a prepony. Vypočítajte dĺžku prepony.

(*3 body*)

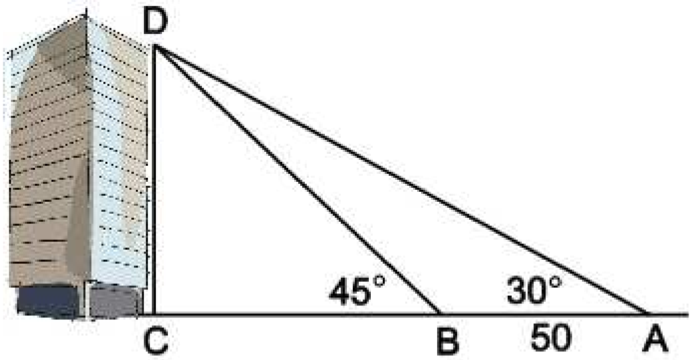
2. Na obrázku je časť grafu lineárnej funkcie. Nájdite jej predpis a vypočítajte obsah vyznačenej plochy.

(*4 body*)



3. Bod D na okraji strechy výškovej budovy stojacej na rovine vidíme z miesta A pod výškovým uhlom 30°. Ak prídeme k budove o 50 m bližšie, vidíme tento bod D z miesta B pod výškovým uhlom 45°. Vypočítajte výšku budovy. Výsledok uveďte zaokrúhlený na metre.

(*4 body*)



4. V zásielke obsahujúcej 30 výrobkov je 5 chybných. Náhodne vyberieme 3 výrobky. Aká je pravdepodobnosť, že najviac 1 z nich bude chybný ? Výsledok uveďte zaokrúhlený na 3 desatinné miesta.

(*4 body*)

5a) Nájdite kvocient q a prvý člen a_1 geometrickej postupnosti, ak súčet nekonečného geometrického radu z nej utvoreného je $s = 4$ a súčet jej prvých 6 členov $s_6 = \frac{16}{63}$.

(*5 bodov*)

5b) Vypočítajte súradnice bodu N, ktorý je súmerný s bodom $M[1;1;\ 3]$ podľa roviny $\alpha : 2x + y - 3z - 8 = 0$.

(*5 bodov*)

1. V pravouhlom trojuholníku má jedna odvesna dĺžku 6 cm. Dĺžka druhej odvesny je aritmetickým priemerom dĺžky prvej odvesny a prepony. Vypočítajte dĺžku prepony.

(*3 body*)

Riešenie

Označme a, b odvesny, c preponu. Podľa zadania sa

$$a = 6, \tag{1}$$

$$b = \frac{a+c}{2}, \tag{2}$$

z Pytagorovej vety vyplýva $a^2 + b^2 = c^2$. (3)

Po dosadení (1) a (2) do (3) dostaneme

$$6^2 + \left(\frac{6+c}{2}\right)^2 = c^2, \tag{4}$$

odtiaľ úpravami $36 + \left(3 + \frac{c}{2}\right)^2 = c^2,\quad 36 + 9 + 3c + \frac{c^2}{4} = c^2,$

$$45 + 3c - \frac{3}{4}c^2 = 0,\quad 180 + 12c - 3c^2 = 0,\quad c^2 - 4c - 60 = 0. \tag{5}$$

Posledná rovnica má diskriminat

$$D = (-4)^2 - 4.(-60) = 256,\ \sqrt{D} = 16$$

Riešeniami rovnice (5) sú preto

$$c_1 = \frac{4+16}{2} = 10,\quad c_2 = \frac{4-16}{2} = -6.$$

Pretože veľkosť prepony je kladné číslo, je hľadaným riešením len $c = 10$.

Prepona má dĺžku 10 cm.

Poznámka. Ak z (1) a (2) vyjadríme $c = 2b - 6$
a toto vyjadrenie dosadíme do (3), dostaneme rovnicu

$$6^2 + b^2 = (2b-6)^2, \tag{6}$$

z nej úpravami $36 + b^2 = 4b^2 - 24b + 36,\quad 24b = 3b^2,\quad 8b = b^2.$

Posledná rovnica má 2 korene: $b_1 = 8,\ b_2 = 0$.

Veľkosť odvesny je kladné číslo, preto dĺžka druhej odvesny je $b = 8$. Hľadanú dĺžku prepony nájdeme z Pytagorovej vety

$$c^2 = a^2 + b^2 = 6^2 + 8^2 = 36 + 64 = 100,$$

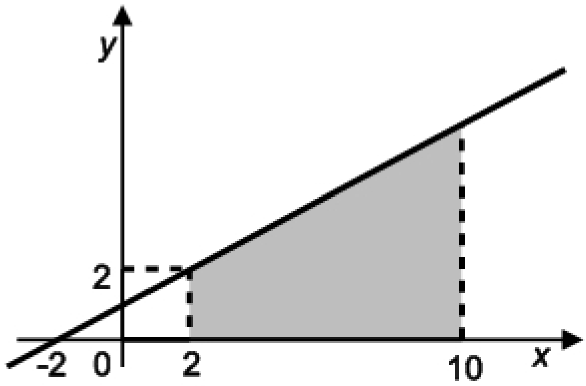
odtiaľ (keďže hľadané c je kladné číslo) $c = 10$.

Hodnotenie

(3 body)

- ak žiak uviedol sústavu (2), (3) alebo niektorú z rovníc (4), (6) **1 bod**
- za vyriešenie niektorej z rovníc (4), (6) **1 bod**
- za dĺžku prepony získanú správnym postupom **1 bod**
  tento 1 bod prideľte, ak žiak správne vyriešil niektorú z rovníc (4), (6) a z jeho zápisu je zrejmé, že vylúčil riešenie $c = -6$, resp. $b = 0$.

2. Na obrázku je časť grafu lineárnej funkcie. Nájdite jej predpis a vypočítajte obsah vyznačenej plochy. (*4 body*)



Riešenie

(*1. krok – predpis lineárnej funkcie*)
Predpis f môžeme nájsť napr. niektorým z nasledujúcich postupov:

- Hľadaný predpis má tvar $f(x) = ax + b$. (1)

  Podľa obrázka sa $f(-2) = 0$ a $f(2) = 2$, dosadením týchto hodnôt do (1) máme
  $$\begin{aligned} 0 &= a \cdot (-2) + b \\ 2 &= a \cdot 2 + b \end{aligned} \qquad (2)$$
  odtiaľ $b = 1$, $a = 0{,}5$.
- Priamka, na ktorej ležia body $A[-2\,,0]$ a $B[2\,,2]$, má smerový vektor $B - A = (4\,,2)$. Vektor $(2\,,-4)$ je potom jej normálový vektor, preto jej rovnica má tvar
  $$2x - 4y + c = 0.$$
  Ak do tejto rovnice dosadíme napr. súradnice bodu $A[-2\,,0]$, ležiaceho na našej priamke, dostaneme $c = 4$. Hľadaná rovnica je teda
  $$2x - 4y + 4 = 0, \quad \text{t.j.} \quad x - 2y + 2 = 0.$$
- Smernica priamky, na ktorej ležia body $[2\,,2]$ a $[-2\,,0]$, je $k = \dfrac{2-0}{2-(-2)} = \dfrac{1}{2}$, preto rovnica priamky na obrázku je $y = \dfrac{1}{2}x + q$. Dosadením súradníc bodu $[2\,,2]$ (ležiaceho na danej priamke) do tejto rovnice dostávame
  $$2 = \frac{1}{2} \cdot 2 + q, \text{ odtiaľ } q = 1.$$

Predpis lineárnej funkcie na obrázku je teda
$$f(x) = 0{,}5x + 1. \qquad (3)$$
(*2. krok – obsah vyznačenej plochy*)
Obsah vyznačenej plochy môžeme vypočítať niektorým z nasledujúcich postupov:

- Vyznačená plocha je pravouhlý lichobežník, ktorého základne majú dĺžky
  $$a = f(2) = 2, \quad b = f(10) = 6 \qquad (4)$$
  (hodnotu $f(10)$ sme našli dosadením $x = 10$ do (3))
  a ktorého výška je $v = 10 - 2 = 8$.

Plocha tohto lichobežníka je

$$P = \frac{a+b}{2} \cdot v = \frac{2+6}{2} \cdot 8 = 32 .$$

- Veľkosť vyznačenej plochy je

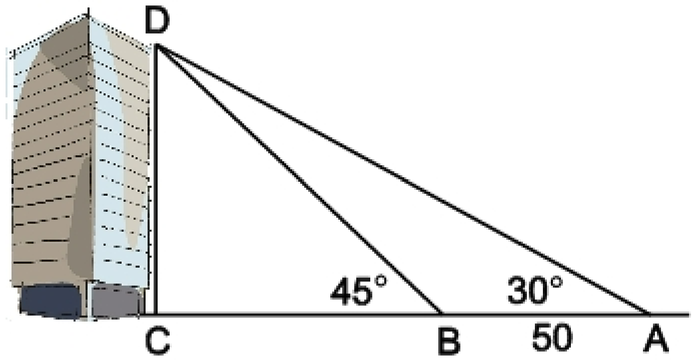
$$\int_2^{10} f(x)\,dx = \int_2^{10} (0{,}5x+1)\,dx = \left[0{,}5 \cdot \frac{x^2}{2} + x\right]_2^{10} = (25+10)-(1+2) = 32 .$$

Lineárna funkcia na obrázku má predpis $f(x) = 0{,}5x + 1$, obsah vyznačenej plochy je 32.

Hodnotenie
(4 body)

- za predpis funkcie **2 body**
  - ak žiak nenašiel predpis funkcie, ale uviedol aspoň jednu z rovníc (2) alebo správne vypočítal jeden z koeficientov a, b v predpise (1), alebo správne určil smerový alebo normálový vektor danej priamky, prideľte z týchto 2 bodov **1 bod**
  - ak žiak uviedol len rovnicu (1), prideľte mu z týchto 2 bodov **0,5 boda**
- za obsah vyznačenej plochy **2 body**
  - ak žiak nevypočítal obsah alebo ho vypočítal nesprávne, ale v riešení uviedol rovnosť $P = \int_2^{10} (0{,}5x+1)dx$ alebo konštatoval, že vyznačená plocha je lichobežník, a súčasne s týmto konštatovaním správne vypočítal jeho výšku alebo veľkosť dlhšej základne (*tj. hodnotu* $f(10)$), prideľte z týchto 2 bodov **1 bod**

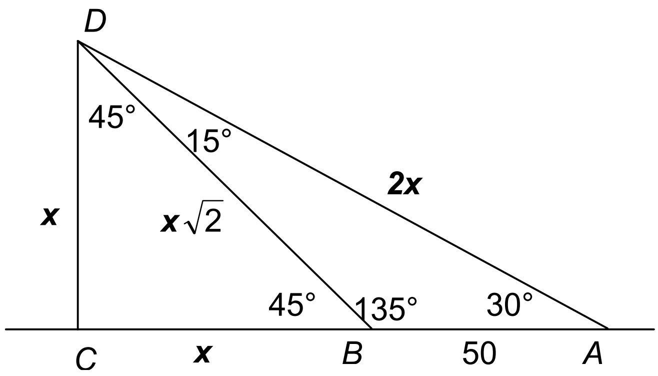
3. Bod D na okraji strechy výškovej budovy stojacej na rovine vidíme z miesta A pod výškovým uhlom 30°. Ak prídeme k budove o 50 m bližšie, vidíme tento bod D z miesta B pod výškovým uhlom 45°. Vypočítajte výšku budovy. Výsledok uveďte zaokrúhlený na metre. (*4 body*)



Riešenie

Označme hľadanú výšku x. Potom
- pretože trojuholník BCD je pravouhlý a rovnoramenný, platí $|CB| = x$, $|BD| = \sqrt{2}x$,
- pretože trojuholník ACD je „polovica" rovnostranného trojuholníka, platí $|AD| = 2x$

(pozri obrázok 1).



Obr. 1

Výšku x môžeme vypočítať niektorým z nasledujúcich postupov:
- (*z pravouhlého trojuholníka ACD použitím goniometrických funkcií*[1])

  V trojuholníku ACD sa $\tan 30° = \dfrac{|CD|}{|AC|}$, tj.

$$\frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{x}{x+50}, \tag{1}$$

  odtiaľ $$x = \frac{50}{\sqrt{3}-1} \cong \frac{50}{0{,}732\,050\,81} \cong 68 \text{ (m)}.$$

- (*z pravouhlého trojuholníka ADC Pytagorovou vetou*)

  Z Pytagorovej vety $|AD|^2 = |DC|^2 + |AC|^2$ dostávame

$$4x^2 = x^2 + (x+50)^2, \tag{2}$$

  odtiaľ $$2x^2 - 100x - 2500 = 0. \tag{3}$$

  Riešením tejto rovnice sú čísla

[1] Namiesto označenia tg používame tan

$$x_{1,2} = \frac{100 \pm \sqrt{30\,000}}{4} = 25\left(1 \pm \sqrt{3}\right).$$

Hľadaná výška je kladné číslo, preto z týchto dvoch riešení pripadá do úvahy len

$$x = 25\left(1 + \sqrt{3}\right) \cong 68 \text{ (m)}.$$

- (*z trojuholníka ABD kosínusovou vetou*)

  Z kosínusovej vety $|BD|^2 = |AB|^2 + |AD|^2 - 2 \cdot |AB| \cdot |AD| \cdot \cos 30°$ dostávame

$$2x^2 = 2\,500 + 4x^2 - 2 \cdot 50 \cdot (2x) \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}, \tag{4}$$

  tj.

$$2x^2 - 100 \cdot \sqrt{3}x + 2\,500 = 0. \tag{5}$$

  Riešením tejto rovnice sú čísla

$$x_{1,2} = \frac{100 \cdot \sqrt{3} \pm \sqrt{10\,000}}{4} = 25\left(\sqrt{3} \pm 1\right),$$

  tj.

$$x_1 \cong 68, \ x_2 \cong 18.$$

  Číslo $x_2 \cong 18$ nemôže byť hľadanou výškou, pretože potom by strana AD, ktorá je v trojuholníku ABD najdlhšia (leží proti najväčšiemu uhlu), mala dĺžku menšiu ako strana AB, čo nie je možné.

  Hľadaná výška je preto $x_1 \cong 68$ (m).

- (*z trojuholníka ABD sínusovou vetou*)

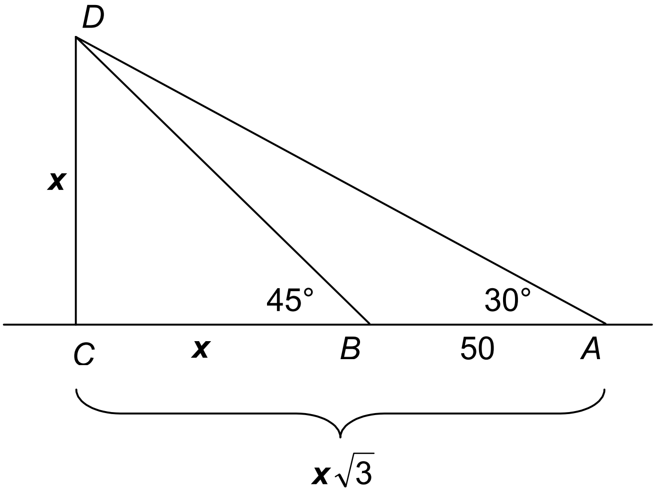
  Zo sínusovej vety $|AB| \cdot \sin 30° = |BD| \cdot \sin 15°$ dostávame

$$50 \cdot \sin 30° = \sqrt{2}\, x \cdot \sin 15°, \tag{6}$$

  odtiaľ $x = \dfrac{50 \cdot \sin 30°}{\sqrt{2} \cdot \sin 15°} \cong \dfrac{50 \cdot 0{,}5}{1{,}414\,213\,562 \cdot 0{,}258\,819\,045} \cong 68$ (m).

Výška budovy je približne 68 m.

Poznámky. 1. Rovnicu $x + 50 = \sqrt{3}\,x$ (ktorá je ekvivalentná s rovnicou (1)) môže žiak „odčítať“ priamo z obrázka, ak vyjadrí dĺžky $|AC|$ a $|BC|$ pomocou x (pozri obr. 2).



Obr. 2

2. Rovnicu ekvivalentnú s rovnicou (1) dostaneme aj použitím niektorej z rovností

$$\tan 60° = \frac{|AC|}{|CD|},\ \cos 30° = \frac{|AC|}{|AD|},\ \sin 60° = \frac{|AC|}{|AD|},$$

tj. $$\sqrt{3} = \frac{x+50}{x} \quad \text{alebo} \quad \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{x+50}{2x}. \qquad (7)$$

3. Použitím kosínusovej vety pre stranu AD v trojuholníku ABD dostaneme

$$|AD|^2 = |AB|^2 + |BD|^2 - 2\,.\,|AB|\,.\,|BD|\,.\cos 135°,$$

t.j. $4x^2 = 2\,500 + 2x^2 - 2\,.\,50\,.\left(x\sqrt{2}\right).\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$

a úpravou tejto rovnice dostaneme rovnicu (3).

Hodnotenie
(4 body)

- za zostavenie rovnice s 1 neznámou, umožňujúcej nájdenie hodnoty x (*napr. niektorá z rovníc (1) až (7)*), *tieto 2 body prideľte aj vtedy, keď žiak na obrázku vyjadril pomocou x dĺžky $|AC|$ a $|BC|$ (pozri obr. 2)* — **2 body**
  - ak žiak nezostavil takú rovnicu, ale vyjadril pomocou x aspoň jednu z dĺžok $|BC|$, $|BD|$, $|AD|$, prideľte z týchto 2 bodov **1 bod**
- za vyriešenie tejto rovnice — **1,5 boda**
- ak žiak uviedol ako odpoveď hodnotu x získanú správnym postupom a správne zaokrúhlenú — **0,5 boda**
  - ak žiak neuviedol výsledok alebo uviedol výsledok, ktorý nie je správne zaokrúhlený, alebo (napr. v dôsledku zaokrúhľovania pri medzivýpočtoch) sa odlišuje od požadovaného výsledku, prideľte z tohto 0,5 boda **0 bodov**

4. V zásielke obsahujúcej 30 výrobkov je 5 chybných. Náhodne vyberieme 3 výrobky. Aká je pravdepodobnosť, že najviac 1 z nich bude chybný ? Výsledok uveďte zaokrúhlený na 3 desatinné miesta. (*4 body*)

Riešenie I (na poradí nezáleží)

Predstavme si, že 3 výrobky vyberáme „naraz“ (teda na poradí výberu nezáleží). Potom 3 výrobky z 30 môžeme vybrať celkom

$$\binom{30}{3} = 4\,060 \text{ spôsobmi.}$$

Zaujímajú nás tie výbery, pri ktorých vyberieme z 5 chybných a 25 bezchybných výrobkov buď

- 1 chybný a 2 bezchybné výrobky, týchto výberov je

$$\binom{5}{1}\cdot\binom{25}{2} = 5\cdot 300 = 1\,500\,,$$

alebo

- 3 bezchybné výrobky, týchto výberov je

$$\binom{25}{3} = 2\,300\,.$$

Celkový počet výberov 3 výrobkov, pri ktorých vyberieme najviac 1 chybný, je teda

$$\binom{5}{1}\cdot\binom{25}{2} + \binom{25}{3} = 3\,800\,.$$

Hľadaná pravdepodobnosť je potom

$$\frac{\binom{5}{1}\cdot\binom{25}{2} + \binom{25}{3}}{\binom{30}{3}} = \frac{3\,800}{4\,060} \cong 0{,}936.$$

Hľadaná pravdepodobnosť je približne 0,936.

Riešenie II (na poradí záleží)

Ak si predstavíme, že 3 výrobky z 30 vyberáme postupne (teda najprv prvý, potom druhý atď.), môžeme na výpočet použiť variácie alebo podmienenú pravdepodobnosť.

IIa) Riešenie pomocou variácií

Ak na poradí vyberania záleží, môžeme 3 výrobky z 30 vybrať celkom

$$N = 30\cdot 29\cdot 28 = 24\,360 \text{ spôsobmi.}$$

1 chybný a 2 bezchybné výrobky môžeme z celkom 5 chybných a 25 bezchybných výrobkov vybrať

$$M_1 = 3\cdot 5\cdot 25\cdot 24 = 9\,000 \text{ spôsobmi}$$

(chybný výrobok môžeme vybrať ako prvý, ako druhý alebo ako tretí – to sú celkom 3 možnosti jeho poradia, na vybrané miesto môžeme umiestniť 1 z 5 chybných výrobkov celkom 5 spôsobmi, na prvé z neobsadených miest môžeme umiestniť ktorýkoľvek z 25 bezchybných výrokov a na druhé neobsadené miesto ktorýkoľvek zo zvyšných 24 bezchybných výrobkov).

3 bezchybné výrobky z celkom 25 bezchybných môžeme – ak na poradí vyberania záleží – vybrať

$$M_0 = 25 \cdot 24 \cdot 23 = 13\,800 \text{ spôsobmi.}$$

Hľadaná prevdepodobnosť je potom

$$P = \frac{M_0 + M_1}{N} = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23 + 3 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 24}{30 \cdot 29 \cdot 28} = \frac{22\,800}{24\,360} \cong 0{,}936 \; .$$

Hľadaná pravdepodobnosť je približne 0,936.

IIb) Riešenie pomocou podmienenej pravdepodobnosti

Pravdepodobnosť, že ako prvý vyberieme chybný výrobok a zvyšné 2 vybrané budú bezchybné, je

$$P_1 = \frac{5}{30} \cdot \frac{25}{29} \cdot \frac{24}{28} \cong 0{,}123\,153 \, .$$

Pravdepodobnosť, že chybný výrobok vyberieme ako druhý, resp. tretí v poradí a ostatné 2 budú bezchybné, je

$$P_2 = \frac{25}{30} \cdot \frac{5}{29} \cdot \frac{24}{28} \cong 0{,}123\,153 \, ,$$

resp.

$$P_3 = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29} \cdot \frac{5}{28} \cong 0{,}123\,153 \, .$$

.

Pravdepodobnosť, že vyberieme všetky 3 výrobky bezchybné, je

$$P_0 = \frac{25}{30} \cdot \frac{24}{29} \cdot \frac{23}{28} \cong 0{,}566\,502 \, .$$

Potom hľadaná pravdepodobnosť, že vyberieme najviac 1 chybný výrobok, je

$$P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3 = \frac{25 \cdot 24 \cdot 23}{30 \cdot 29 \cdot 28} + 3 \cdot \frac{25 \cdot 24 \cdot 5}{30 \cdot 29 \cdot 28} \cong$$

$$\cong 0{,}566\,502 + 3 \cdot 0{,}123\,153 = 0{,}935\,961 \cong 0{,}936 \, .$$

Hľadaná pravdepodobnosť je približne 0,936.

Poznámka. Je možné, že niektorí žiaci pri výpočte uvedenej pravdepodobnosti použijú Bernoulliho schému, teda budú predpokladať, že pravdepodobnosť výberu chybného výrobku je

$$P_1 = \frac{5}{30} = \frac{1}{6} \; ,$$

pravdepodobnosť výberu bezchybného výrobku

$$P_0 = \frac{25}{30} = \frac{5}{6}$$

a hľadanú pravdepodobnosť vypočítajú nasledovne:

$$P = P_0^3 + \binom{3}{1} \cdot P_0^2 \cdot P_1 = \left(\frac{5}{6}\right)^3 + 3 \cdot \left(\frac{5}{6}\right)^2 \cdot \frac{1}{6} = \frac{200}{216} \cong 0{,}926 \, .$$

(Pozor, tento výsledok sa od správneho **odlišuje** na mieste stotín.)

Hodnotenie
(4 body)

Riešenie I

- za správne určený počet všetkých možností výberu 3 výrobkov z 30 (*stačí zápis pomocou kombinačného čísla*) **1 bod**
- za správne určený počet priaznivých možností (*stačí zápis pomocou kombinačného čísla*) **2 body**
  - o ak žiak uvedie, že počet priaznivých možností je $\binom{5}{1}\cdot\binom{25}{2}$, tj. 1 500, alebo $\binom{25}{2}+\binom{25}{3}$, tj. 2 600, prideľte mu z týchto 2 bodov **1 bod**
- za výsledok získaný správnym postupom[2] a <u>správne zaokrúhlený</u> **1 bod**
  - o za výsledok získaný správnym postupom, ktorý ale nie je správne zaokrúhlený, alebo (napr. v dôsledku zaokruhľovania pri medzivýpočtoch) sa odlišuje od správneho výsledku, prideľte z tohto 1 boda **0,5 boda**

Riešenie IIa

- za správne určený počet všetkých možností výberu 3 výrobkov z 30 **1 bod**
- za správne určený počet priaznivých možností **2 body**
  - o ak žiak uvedie, že počet priaznivých možností je $3 \cdot 5 \cdot 25 \cdot 24$, tj. 9 000, alebo $25\cdot 24\cdot 23+3\cdot 25\cdot 24$, tj. 15 600, alebo $25\cdot 24\cdot 23+5\cdot 25\cdot 24$, tj. 16 800, prideľte mu z týchto 2 bodov **1 bod**
- za výsledok získaný správnym postupom[2] a <u>správne zaokrúhlený</u> **1 bod**
  - o za výsledok získaný správnym postupom, ktorý ale nie je správne zaokrúhlený, alebo (napr. v dôsledku zaokruhľovania pri medzivýpočtoch) sa odlišuje od správneho výsledku, prideľte z tohto 1 boda **0,5 boda**

Riešenie IIb

- za výsledok získaný výpočtom $P = P_0 + P_1 + P_2 + P_3$ a <u>správne zaokrúhlený</u> **4 body**
  - o za výsledok získaný uvedeným výpočtom, ktorý ale nie je správne zaokrúhlený, alebo (napr. v dôsledku zaokruhľovania pri medzivýpočtoch) sa odlišuje od požadovaného výsledku, prideľte celkom **len 3,5 boda**
  - o za výsledok získaný výpočtom $P = P_0 + P_k$, kde $k \in \{1,2,3\}$, tj. výpo-

[2] tj. žiak vydelil počet priaznivých možností počtom všetkých možností, pričom pri hodnotení získal za počet priaznivých aj za počet všetkých možností nenulový počet bodov

čtom $\frac{25\cdot 24\cdot 23}{30\cdot 29\cdot 28}+\frac{25\cdot 24\cdot 5}{30\cdot 29\cdot 28}$, alebo výpočtom $P_1+P_2+P_3$,
a zaokrúhlený v súlade s požiadavkami zadania, prideľte celkom

len 3 body

- o za výsledok získaný výpočtom $P=P_0+P_k$, kde $k\in\{1,2,3,4\}$, tj. výpočtom $\frac{25\cdot 24\cdot 23}{30\cdot 29\cdot 28}+\frac{25\cdot 24\cdot 5}{30\cdot 29\cdot 28}$, alebo výpočtom $P_1+P_2+P_3$, ktorý nie je zaokrúhlený v súlade s požiadavkami zadania, prideľte celkom

len 2,5 boda

Riešenie pomocou Bernoulliho schémy

- za výsledok získaný výpočtom $P=P_0^3+3\cdot P_0^2\cdot P_1$ (bez ohľadu na to, či je alebo nie je zaokrúhlený) **3,5 boda**
  - o za výsledok získaný výpočtom $P=P_0^3+P_0^2\cdot P_1$ alebo $P=3\cdot P_0^2\cdot P_1$ (bez ohľadu na to, či je alebo nie je zaokrúhlený), prideľte celkom

2,5 boda

5a) Nájdite kvocient q a prvý člen a_1 geometrickej postupnosti, ak súčet nekonečného geometrického radu z nej utvoreného je $S = 4$ a súčet jej prvých 6 členov $S_6 = \frac{63}{16}$.

(*5 bodov*)

Riešenie

Podľa zadania má platiť
$$S = \frac{a_1}{1-q} = 4, \tag{1}$$
$$S_6 = a_1 \cdot \frac{1-q^6}{1-q} = \frac{63}{16}. \tag{2}$$

Ak (1) dosadíme do (2), dostaneme postupnými úpravami
$$4 \cdot \left(1-q^6\right) = \frac{63}{16}, \qquad 1-q^6 = \frac{63}{64}$$
$$q^6 = \frac{1}{64}. \tag{3}$$

Rovnica (3) má dve riešenia: $q_1 = \frac{1}{2}, \quad q_2 = -\frac{1}{2}$.

Dosadením získaných hodnôt q_1 a q_2 do (1) nájdeme príslušné hodnoty prvého člena postupnosti:

- pre $q_1 = \frac{1}{2}$ dostaneme $\frac{a_1}{1-\frac{1}{2}} = 4$, odtiaľ $a_1 = 2$;
- pre $q_2 = -\frac{1}{2}$ dostaneme $\frac{a_1}{1+\frac{1}{2}} = 4$, odtiaľ $a_1 = 6$.

Daná úloha má dve riešenia: $q_1 = \frac{1}{2}$ **a** $a_1 = 2$ **alebo** $q_2 = -\frac{1}{2}$ **a** $a_2 = 6$**.**

Poznámka. Sústavu (1), (2) možno riešiť aj nasledovne : z rovnice (1) vyjadríme $q = 1 - \frac{a_1}{4}$ a dosadíme do (2), postupnými úpravami dostaneme
$$a_1 \cdot \frac{1-\left(1-\frac{a_1}{4}\right)^6}{1-\left(1-\frac{a_1}{4}\right)} = \frac{63}{16}, \quad a_1 \cdot \frac{1-\left(1-\frac{a_1}{4}\right)^6}{\frac{a_1}{4}} = \frac{63}{16}, \quad 1-\left(1-\frac{a_1}{4}\right)^6 = \frac{63}{64},$$
$$\left(1-\frac{a_1}{4}\right)^6 = \frac{1}{64}. \tag{4}$$

Rovnica (4) má dve riešenia :

- buď $1-\frac{a_1}{4} = \frac{1}{2}$, tj. $a_1 = 2$; zodpovedajúca hodnota q je $q = 1-\frac{a_1}{4} = \frac{1}{2}$,
- alebo $1-\frac{a_1}{4} = -\frac{1}{2}$, tj. $a_1 = 6$; zodpovedajúca hodnota q je $q = 1-\frac{a_1}{4} = -\frac{1}{2}$.

Hodnotenie
(5 bodov)

• ak žiak uviedol obidve rovnice (1) a (2)	**1 bod**
• ak žiak z jednej z rovníc (1), (2) vyjadril jednu z neznámych a dosadil do druhej rovnice	**1 bod**
• ak žiak dospel správnym postupom k rovnici (3) alebo (4)	**1 bod**
• za každé riešenie rovnice (3), resp. (4) (*ak žiak riešil rovnicu (3), tak získava tieto body za výpočet hodnôt* q ; *ak riešil rovnicu (4), získava tieto body za výpočet hodnôt* a_1)	**po 0,5 boda**
• za každý správne určený zvyšný člen dvojice $[a_1 ; q]$ (*ak žiak riešil rovnicu (3), tak získava tieto body za výpočet príslušných hodnôt* a_1; *ak riešil rovnicu (4), získava tieto body za výpočet príslušných hodnôt* q)	**po 0,5 boda**

5b) Vypočítajte súradnice bodu N, ktorý je súmerný s bodom $M[1;1;3]$ podľa roviny $\alpha: 2x+y-3z-8=0$. (*5 bodov*)

Riešenie

Nech bod N má súradnice $N[x_N; y_N; z_N]$.

Bod N je jednoznačne určený nasledujúcimi vlastnosťami
(I) body M, N ležia na priamke q, ktorá je kolmá na rovinu α,
(II) stred S úsečky MN leží v rovine α.

Normálový vektor roviny $\alpha: 2x+y-3z-8=0$ je

$$\vec{n}=(2,1,-3),$$

pomocou neho môžeme vlastnosť (I) vyjadriť napr. niektorým z nasledujúcich spôsobov:

- Bod N leží na priamke q, ktorá má parametrické vyjadrenie $q: X=M+t\cdot\vec{n}$, t.j.
  $$q: X=[1;1;3]+t\cdot(2,1,-3), \qquad t\in R, \tag{1}$$
  resp.
  $$q: x=1+2t, \quad y=1+t, \quad z=3-3t, \qquad t\in R. \tag{2}$$
  Preto pre niektorú hodnotu t musí platiť
  $$x_N=1+2t, \quad y_N=1+t, \quad z_N=3-3t. \tag{3}$$

- Vektor $N–M$ je násobok vektora $\vec{n}=(2,1,-3)$, teda pre niektoré $t\in R$ platí
  $$N-M=t\cdot\vec{n},$$
  t.j.
  $$(x_N-1;\, y_N-1;\, z_N-3)=t\cdot(2,1,-3). \tag{4}$$

Vlastnosť (II) môžeme vyjadriť napr. niektorým z nasledujúcich spôsobov:

(IIa) Stred S úsečky MN je priesečník priamky q s rovinou α. Priesečník q, α nájdeme dosadením (2) do rovnice roviny α

$$2(1+2t)+(1+t)-3(3-3t)-8=0, \tag{5}$$

odtiaľ $14t=14$, t.j. $t=1$.

Dosadením tohto t do (2) nájdeme súradnice bodu S:

$$S[3;2;0].$$

Súradnice bodu N nájdeme jednou z nasledujúcich úvah:

- Bod S je stred úsečky MN, preto $S=\dfrac{M+N}{2}$, (6)
  t.j.
  $$3=\frac{1+x_N}{2}, \quad 2=\frac{1+y_N}{2}, \quad 0=\frac{3+z_N}{2}, \tag{7}$$
  odtiaľ
  $$x_N=5, \quad y_N=3, \quad z_N=-3. \tag{8}$$
- Vektory $N-S$ a $S-M$ sa rovnajú
  $$N-S=S-M, \tag{9}$$
  t.j.
  $$(x_N-3;\, y_N-2;\, z_N)=(2;1;-3) \tag{10}$$
  odtiaľ dostávame výsledok (8).
- V parametrickej rovnici priamky q zodpovedal bod M hodnote parametra $t=0$ (pozri rovnice (2)), priesečník S zodpovedal hodnote $t=1$. Číslo t určuje, aký násobok

vektora $\vec{n}$ musíme pripočítať k bodu *M*. Ak sme sa do stredu *S* úsečky *MN* dostali z bodu *M* pripočítaním vektora $\vec{n}$, tak do jej krajného bodu sa dostaneme, ak k *M* pripočítame dvojnásobok vektora $\vec{n}$:

$$N = M + 2\cdot\vec{n}\,. \qquad (11)$$

Dosadením súradníc bodu M a vektora $\vec{n}$ do (11) alebo – čo je to isté – dosadením $t = 2$ do rovníc (2) dostaneme výsledok (8).

- Vzdialenosti $|MS|$ a $|NS|$ sú rovnaké :

$$|MS| = |NS|\,. \qquad (12)$$

Ak túto rovnosť umocníme na druhú a vyjadríme pomocou súradníc bodov $M[1;1;3]$, $S[3;2;0]$, $N[1+2t;1+t;3-3t]$ (pozri (3)), dostaneme

$$(3-1)^2+(2-1)^2+(0-3)^2=[(1+2t)-3]^2+[(1+t)-2]^2+[(3-3t)-0]^2,$$

odtiaľ postupne $\qquad 14 = 14t^2 - 28t + 14$,

$$14t^2 - 28t = 0, \qquad t(t-2) = 0,$$

teda $\qquad t = 0 \quad$ alebo $\quad t = 2$.

Dosadením $t = 0$ do (2) dostaneme súradnice bodu *M*, ten nie je hľadaným riešením. Dosadením $t = 2$ do (2) dostávame hľadané súradnice bodu *N*, pozri (8).

(IIb) Stred *S* úsečky *MN* leží v rovine α. Keďže $S = \dfrac{M+N}{2}$, má bod *S* súradnice $S\left[\dfrac{1+x_N}{2};\dfrac{1+y_N}{2};\dfrac{3+z_N}{2}\right]$, tie musia vyhovovať rovnici roviny α, teda musí platiť

$$2\left(\frac{1+x_N}{2}\right)+\frac{1+y_N}{2}-3\left(\frac{3+z_N}{2}\right)-8=0,$$

po úprave

$$2x_N + y_N - 3z_N - 22 = 0\,. \qquad (13)$$

Ak do (13) dosadíme podľa (2) alebo (3), dostaneme

$$2(1+2t)+(1+t)-3(3-3t)-22=0\,, \qquad (14)$$

odtiaľ $\qquad 14t = 28, \quad$ t.j. $\quad t = 2$.

Dosadením tohto *t* do (2) alebo (3) dostávame výsledok (8).

(IIc) Body *M, N* majú rovnakú vzdialenosť od roviny α, pritom

$$d(M,\alpha)=\frac{|2x_M+y_M-3z_M-8|}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}}=\frac{|2\cdot1+1-3\cdot3-8|}{\sqrt{14}}=\frac{14}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}\,. \qquad (15)$$

Preto aj vzdialenosť $d(N,\alpha)$ musí byť $\sqrt{14}$:

$$d(N,\alpha)=\sqrt{14}\,, \qquad (16)$$

t.j.

$$\frac{|2x_N+y_N-3z_N-8|}{\sqrt{2^2+1^2+(-3)^2}}=\frac{|2x_N+y_N-3z_N-8|}{\sqrt{14}}=\sqrt{14}\,, \qquad (17)$$

$$|2x_N+y_N-3z_N-8|=14\,, \qquad (18)$$

odtiaľ

$$2x_N+y_N-3z_N-8=14 \quad \text{alebo} \quad 2x_N+y_N-3z_N-8=-14\,,$$

t.j. $\qquad 2x_N+y_N-3z_N-22=0 \qquad (19)$

alebo $\qquad 2x_N+y_N-3z_N+6=0\,. \qquad (20)$

Dosadením (2) do (19) dostaneme rovnicu, ktorej riešením sú súradnice bodu *M*, ten nie je riešením našej úlohy. Dosadením (2) do (20) dostávame rovnicu (14), ktorá vedie k riešeniu (8).

Bod *N* má súradnice $N[5\,;3\,;-3]$.

Poznámka. Je možné, že niektorí žiaci namiesto rovnice (16) použijú rovnicu

$$|MN| = 2\cdot d(M,\alpha) = 2\sqrt{14}\,, \tag{20}$$

Po dosadení súradníc bodov $M[1;1;3], N[1+2t\,;1+t\,;3-3t]$ do (20) dostaneme postupne

$$\sqrt{(2t)^2 + t^2 + (-3t)^2} = 2\sqrt{14}\,, \tag{21}$$

$$\sqrt{14t^2} = 2\sqrt{14}\,, \qquad \sqrt{t^2} = 2\,,$$

odtiaľ $\quad t = 2 \quad$ alebo $\quad t = -2$.

Dosadením do (2) dostaneme pre $t = 2$ bod $N_1[5\,;3\,;-3]$, pre $t = -2$ bod $N_2[-3\,;-1;9]$.
Hľadaný bod *N* leží v opačnom polpriestore určenom rovinou α než bod *M*. Dosadením súradníc bodov *M*, N_1, N_2 do rovnice roviny α dostávame[3]

pre *M* $\quad 2\cdot1+1\cdot1-3\cdot3-8=-14<0$

pre N_1 $\quad 2\cdot5+1\cdot3-3\cdot(-3)-8=14>0$

pre N_2 $\quad 2\cdot(-3)+1\cdot(-1)-3\cdot9-8=-42<0$.

To znamená, že bod N_2 leží v rovnakom polpriestore ako *M*, bod N_1 leží v opačnom polpriestore. Hľadané riešenie je preto $N_1[5\,;3\,;-3]$.

Hodnotenie
(5 bodov)

Riešenie IIa
(žiak hľadá súradnice stredu úsečky *MN*)

- za rovnicu vyjadrujúcu vlastnosť (I) (*napr. rovnice (1), (2), (3), (4)*) **2 body**
  z toho
  - ak žiak vlastnosť (I) vyjadril len slovne, prideľte **0,5 bodu**
  - za nájdenie súradníc normálového vektora $\vec{n}$ prideľte **0,5 bodu**
- za nájdenie hodnoty *t* = 1 alebo výpočet súradníc bodu *S* **1 bod**
- za výpočet súradníc bodu *N* **2 body**
  z toho
  - za vyjadrenie bodu *N* pomocou *M, S* alebo *M,* $\vec{n}$ **1 bod**
    (*napr. rovnice (6), (7), (9), (10), (11), (12)*)
    Tento 1 bod prideľte len vtedy, ak žiak našiel súradnice bodu S alebo hodnotu t = 1

[3] Použitá úvaha presahuje rámec Cieľových požiadaviek z matematiky pre úroveň A, je však možné, že ju niektorí žiaci použijú.

Riešenie IIb

- za rovnicu vyjadrujúcu vlastnosť (I) (*napr. rovnice (1), (2), (3), (4)*) **2 body**
  z toho
  - ak žiak vlastnosť (I) vyjadril len slovne, prideľte **0,5 bodu**
  - za nájdenie súradníc normálového vektora $\vec{n}$ prideľte **0,5 bodu**
- za rovnicu (13) **2 body**
- za výpočet súradníc bodu *N* **1 bod**

Riešenie IIc
(pomocou vzdialenosti bodu od roviny)

- za rovnicu vyjadrujúcu vlastnosť (I) (*napr. rovnice (1), (2), (3), (4)*) **2 body**
  z toho
  - ak žiak vlastnosť (I) vyjadril len slovne, prideľte **0,5 bodu**
  - za nájdenie súradníc normálového vektora $\vec{n}$ prideľte **0,5 bodu**
- za výpočet vzdialenosti $d(M,\alpha)$ **0,5 bodu**
- za ľubovoľnú z rovníc (17), (18) **1 bod**
- za riešenie rovnice (20) **1 bod**
- za výpočet súradníc bodu *N* **0,5 bodu**

Hodnotenie riešenia uvedeného v poznámke

- za rovnicu vyjadrujúcu vlastnosť (I) (*napr. rovnice (1), (2), (3), (4)*) **2 body**
  z toho
  - ak žiak vlastnosť (I) vyjadril len slovne, prideľte **0,5 bodu**
  - za nájdenie súradníc normálového vektora $\vec{n}$ prideľte **0,5 bodu**
- za výpočet vzdialenosti $d(M,\alpha)$ **0,5 bodu**
- za rovnicu (21) **1 bod**
- za nájdenie koreňa $t=-2$ **0,5 bodu**
- za zdôvodnenie, že N_2 nie je hľadané riešenie **0,5 bodu**
- za výpočet súradníc bodu *N* **0,5 bodu**

Zadania :

1. V predajni stavebného materiálu v Starom Meste stojí 1 m^2 dlažby 260,- Sk. V podnikovej predajni vzdialenej 78 km od Starého Mesta poskytujú 15 %-nú zľavu z tejto ceny. Pri kúpe akého množstva dlažby sa oplatí ísť do podnikovej predajne, ak 1 km jazdy autom stojí 9,- Sk ? (V prípade nákupu v Starom Meste považujeme cenu dopravy za zanedbateľnú.)

(*3 body*)

2. Nájdite také $m \in R$, aby rovnica $mx^2 + (2m+3)x + m + \frac{3}{4} = 0$ mala práve jeden koreň.

(*4 body*)

3. Dané sú body $A[2;\ 1]$, $B[0;\ 7]$, $C[3;\ 2]$. Vypočítajte súradnice priesečníka výšok trojuholníka *ABC*.

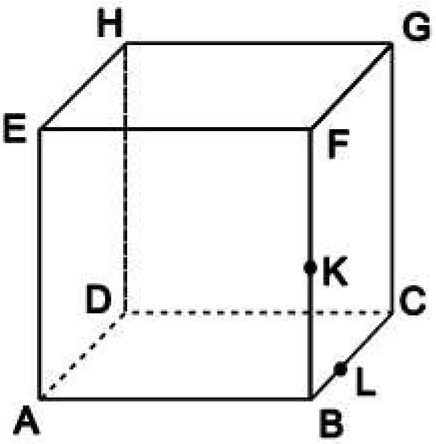
(*4 body*)

4. Nájdite také cifry *x* a *y*, aby šesťciferné číslo 32*x*54*y* bolo deliteľné 36.

(*4 body*)

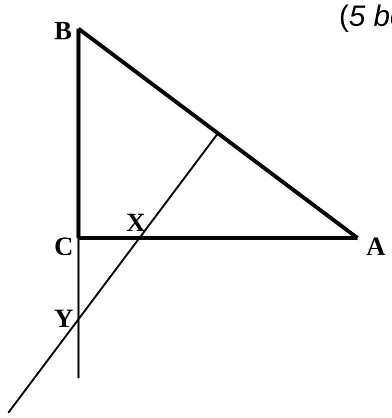
5a) Je daná kocka *ABCDEFGH* s hranou dĺžky 4. Nech bod *K* je stred hrany *BF* a bod *L* nech leží vnútri hrany *BC* tak, že *BL* = 1. Do obrázka v zadaní narysujte rez kocky rovinou β , ktorá obsahuje body *K* , *L* a je rovnobežná s priamkou *EG* . Vypočítajte aj plošný obsah tohto rezu.

(*5 bodov*)



5b) V pravouhlom trojuholníku *ABC* (*AC* = 8 *cm*, *BC* = 6 *cm* a uhol *ACB* je 90°) je zostrojená kolmica na preponu *AB* prechádzajúca jej stredom *S*. Táto kolmica pretína odvesnu *AC* v bode *X* a priamku *BC* v bode *Y*. Vypočítajte veľkosť úsečky *XY*.

(*5 bodov*)



Poznámka: Tento príklad je možné riešiť napríklad využitím podobnosti alebo pomocou analytickej geometrie.

1. V predajni stavebného materiálu v Starom Meste stojí 1 m^2 dlažby 260,- Sk. V podnikovej predajni vzdialenej 78 km od Starého Mesta poskytujú 15 %-nú zľavu z tejto ceny. Pri kúpe akého množstva dlažby sa oplatí ísť do podnikovej predajne, ak 1 km jazdy autom stojí 9,- Sk ? (V prípade nákupu v Starom Meste považujeme cenu dopravy za zanedbateľnú.)

(*3 body*)

Riešenie

Za m (m^2) dlažby zaplatíme v Starom Meste $260m$ (korún). Cena za to isté množstvo v podnikovej predajni je $(260 \cdot 0{,}85) \cdot m$ (korún), k tejto sume ešte musíme prirátať náklady na cestu, ktoré sú $2 \cdot 78 \cdot 9 = 1\,404$ (korún). Celkové náklady na nákup m (m^2) dlažby v podnikovej predajni sú teda

$$(260 \cdot 0{,}85) \cdot m + 1\,404 = 221m + 1\,404 \text{ (korún).} \qquad (1)$$

Nákup v podnikovej predajni sa oplatí, ak

$$221m + 1\,404 < 260\,m\,. \qquad (2)$$

Riešením tejto nerovnice dostávame

$$1\,404 < 39m\,, \qquad (3)$$

$$36 < m\,.$$

Do podnikovej predajne sa oplatí ísť pri kúpe viac ako 36 m^2 dlažby.

Poznámky.

1. Nerovnicu (3) môžeme získať bezprostredne (teda bez predchádzajúceho odvodenia nerovnice (2)) touto úvahou: nákup v podnikovej predajni bude výhodnejší, ak náklady na dopravu – tj. $2 \cdot 78 \cdot 9 = 1\,404$ (korún) – budú menšie ako úspora získaná nižšou cenou dlažby. Táto úspora sa pri nákupe m (m^2) dlažby rovná

$$(260 \cdot 0{,}15) \cdot m = 39\,m \text{ (korún).}$$

To znamená, že nákup v podnikovej predajni bude výhodnejší, ak

$$1\,404 < 39m\,.$$

2. Niektorí žiaci pravdepodobne zabudnú pri výpočte nákladov na cestu vynásobiť vzdialenosť 78 km dvomi. Namiesto (1) tak dostanú

$$(260 \cdot 0{,}85) \cdot m + 702 = 221m + 702$$

a namiesto nerovnice (2), resp. (3) nerovnicu

$$221m + 702 < 260\,m\,, \qquad (4)$$

resp.

$$702 < 39m\,, \qquad (5)$$

ktorej riešením je

$$18 < m\,.$$

Hodnotenie
(3 body)

- ak žiak uviedol nerovnicu (2) alebo (3) **2 body**
  tieto 2 body prideľte aj v prípade, že žiak v nerovnici uvádza namiesto ostrej nerovnosti neostrú
  - ak žiak namiesto (2), resp. (3) uviedol nerovnicu (4), resp. (5) (s ostrou alebo neostrou nerovnosťou), považujte to za numerickú chybu[1] a prideľte z týchto 2 bodov **1,5 bodu**
  - ak žiak neuviedol žiadnu z nerovníc (2), (3), (4), (5), ale vyjadril správne cenu v podnikovej predajni, resp. rozdiel medzi cenou v podnikovej predajni a predajni v meste, prideľte z týchto 2 bodov **1 bod**
- za správne riešenie nerovnice (2) alebo (3) **1 bod**

[1] postupujte teda podľa 3. odrážky zo všeobecných pokynov

2. Nájdite také $m \in R$, aby rovnica $mx^2 + (2m+3)x + m + \frac{3}{4} = 0$ mala práve jeden koreň.

(*4 body*)

Riešenie

Pri riešení musíme rozlíšiť dva prípady :

- Pre $m \neq 0$ je daná rovnica kvadratická, preto má jeden koreň práve vtedy, keď jej diskriminant $$D = (2m+3)^2 - 4 \cdot m \cdot \left(m + \frac{3}{4}\right)$$ je rovný nule. Riešením rovnice $D = 0$, tj.
$$(2m+3)^2 - 4 \cdot m \cdot \left(m + \frac{3}{4}\right) = 0 \qquad (1)$$
dostávame
$$4m^2 + 12m + 9 - 4m^2 - 3m = 0,$$
$$9m + 9 = 0,$$
$$m = -1.$$
Nájdené m je rôzne od nuly, preto je riešením našej úlohy.
- Pre $m = 0$ je daná rovnica lineárna a má tvar
$$3x + \frac{3}{4} = 0 \ . \qquad (2)$$
Rovnica (2) má jediné riešenie (je ním číslo $x = -\frac{1}{4}$), preto $m = 0$ je tiež riešením našej úlohy.

Daná rovnica má práve jeden koreň pre $m = 0$ a $m = -1$.

Poznámka. Rovnicu (1) možno dostať aj touto úvahou: Pre $m \neq 0$ (a $D \geq 0$) má daná rovnica korene $x_{1,2} = \frac{-(2m+3) \pm \sqrt{D}}{2m}$. Práve 1 koreň má vtedy, keď $x_1 = x_2$, t.j.
$$\frac{-(2m+3) + \sqrt{D}}{2m} = \frac{-(2m+3) - \sqrt{D}}{2m}, \qquad (3)$$
odtiaľ $\sqrt{D} = 0$, t.j.
$$\sqrt{(2m+3)^2 - 4 \cdot m \cdot \left(m + \frac{3}{4}\right)} = 0 \ . \qquad (4)$$

Hodnotenie

(4 body)

- ak žiak uviedol riešenie $m = 0$ **1 bod**
- ak žiak uviedol rovnicu (1) alebo (4) **2 body**
  - ak žiak neuviedol rovnicu (1) ani (4), ale uviedol podmienku $D = 0$ (*v ktorej diskriminant nevyjadril pomocou m*) alebo rovnicu (3), prideľte z týchto 2 bodov **1 bod**
- za riešenie $m = -1$ získané riešením rovnice (1) **1 bod**

3. Dané sú body $A[2; 1]$, $B[0; 7]$, $C[3; 2]$. Vypočítajte súradnice priesečníka výšok trojuholníka ABC.

(*4 body*)

Riešenie

Priamka v_c, na ktorej leží výška na stranu AB trojuholníka ABC, má rovnicu

$$v_c : x - 3y + 3 = 0, \tag{1}$$

ktorú môžeme nájsť napr. nasledovne:
Vektor $B - A = (-2, 6)$ je normálový vektor priamky v_c, preto jej rovnica má tvar

$$v_c : -2x + 6y + c = 0.$$

Ak do tejto rovnice dosadíme súradnice bodu C, ktorý leží na priamke v_c, dostaneme

$$-6 + 12 + c = 0 \ , \quad \text{odtiaľ} \quad c = -6 \ .$$

Rovnica priamky v_c je teda $v_c : -2x + 6y - 6 = 0$, tj. $x - 3y + 3 = 0$.

Rovnakým postupom nájdeme rovnicu niektorej zo zvyšných dvoch výšok trojuholníka ABC, napr. výška na stranu AC leží na priamke

$$v_b : x + y - 7 = 0. \tag{2}$$

Súradnice priesečníka výšok trojuholníka sú riešením sústavy (1), (2), tj.

$$\begin{aligned} x - 3y &= -3 \\ x + \ \ y &= 7 \end{aligned} \ . \tag{3}$$

Riešením tejto sústavy dostávame

$$x = 4{,}5, \quad y = 2{,}5.$$

Priesečník výšok trojuholníka *ABC* je bod $[4{,}5\,; 2{,}5]$.

Poznámky.

1. Pri hľadaní rovnice priamky v_c sme mohli použiť aj niektorý z nasledujúcich postupov:

- Priamka AB má smernicu $k = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{7-1}{0-2} = -3$. Súčin smerníc navzájom kolmých priamok sa rovná -1, preto smernica priamky v_c je $\dfrac{1}{3}$. Rovnica priamky v_c má preto tvar

$$y = \frac{1}{3}x + d\,. \tag{4}$$

  Do (4) teraz dosadíme súradnice bodu C, ktorý leží na priamke v_c :

$$2 = \frac{1}{3} \cdot 3 + d \text{, odtiaľ } \ d = 1.$$

  Priamka v_c má teda rovnicu $\quad v_c : y = \dfrac{1}{3}x + 1$.

- Priamka v_c je kolmá na vektor $B - A = (-2, 6)$, preto jeden z jej smerových vektorov je $\mathbf{s} = (6, 2)$. Parametrická rovnica priamky v_c je potom $X = C + t \cdot \mathbf{s}$, tj.

$$\begin{aligned} v_c : x &= 3 + 6t \\ y &= 2 + 2t \end{aligned}\ , \tag{5}$$

kde t je reálny parameter.
Z parametrickej rovnice (5) získame rovnicu v neparametrickom tvare, ak napr. od prvej rovnice odčítame trojnásobok druhej rovnice:

$$x - 3y = (3 + 6t) - 3(2 + 2t) = -3\,, \text{ teda } \quad x - 3y = -3\,.$$

2. Namiesto neparametrických rovníc (1), (2) sme mohli použiť rovnice priamok v_c, v_b v parametrickom tvare. Parametrické rovnice priamky v_c sme odvodili v (5) :

$$v_c : \begin{array}{l} x = 3 + 6t \\ y = 2 + 2t \end{array}\,,$$

(t je reálny parameter).
Jedno z parametrických vyjadrení priamky v_b je $v_b : X = B + s \cdot (1, -1)$, tj.

$$v_b : \begin{array}{l} x = \phantom{7-{}} s \\ y = 7 - s \end{array}\,, \tag{6}$$

kde s je reálny parameter.
Súradnice priesečníka výšok dostaneme dosadením vhodného t do rovníc (5) aj dosadením vhodného s do rovníc (6), tieto parametre t a s sú riešením sústavy

$$\begin{array}{l} 3 + 6t = \phantom{7-{}} s \\ 2 + 2t = 7 - s \end{array} \tag{7}$$

(na ľavej strane sú parametrické vyjadrenia priamky v_c, na pravej strane parametrické vyjadrenia priamky v_b).
Sčítaním prvej a druhej rovnice sústavy (7) dostaneme

$$5 + 8t = 7\,, \quad \text{odtiaľ} \quad t = 0{,}25\,.$$

Dosadením tohto t do (5) dostaneme hľadané súradnice priesečníka výšok:

$$\begin{array}{l} x = 3 + 6 \cdot 0{,}25 = 4{,}5 \\ y = 2 + 2 \cdot 0{,}25 = 2{,}5 \end{array}\,.$$

3. Namiesto ľubovoľnej z priamok v_c, v_b sme mohli pri hľadaní priesečníka uvažovať priamku v_a, na ktorej leží výška na stranu BC. Táto priamka má rovnicu

$$v_a : 3x - 5y - 1 = 0\,,$$

jedným z jej parametrických vyjadrení je $v_a : X = A + r \cdot (5, 3)$, tj.

$$v_a : \begin{array}{l} x = 2 + 5r \\ y = 1 + 3r \end{array}\,,$$

kde r je reálny parameter.

Hodnotenie
(4 body)

- ak žiak našiel rovnice dvoch priamok, na ktorých ležia výšky trojuholníka ABC **3 body**
  - ak žiak našiel rovnicu len jednej takej priamky, prideľte z týchto 3 bodov **2 body**
  - ak žiak nenašiel rovnicu ani jednej takej priamky, ale našiel jej smernicu alebo smerový vektor, prideľte z týchto 3 bodov **1 bod**
- za správnym postupom nájdené súradnice priesečníka výšok **1 bod**

4. Nájdite také cifry x a y, aby šesťciferné číslo $32x54y$ bolo deliteľné 36. (*4 body*)

Riešenie I (použitím ekvivalentných podmienok)

Číslo je deliteľné 36 práve vtedy, keď je súčasne deliteľné 9 aj 4. Dané číslo $32x54y$ bude

- deliteľné 4 práve vtedy, keď jeho posledné dvojčíslie (tj. $4y$) bude deliteľné 4. Z tejto úvahy vyplýva, že y môže byť len niektorá z číslic 0, 4, 8 :
$$y \in \{0, 4, 8\}. \qquad (1)$$
- deliteľné 9 práve vtedy, keď jeho ciferný súčet
$$3 + 2 + x + 5 + 4 + y = 14 + x + y$$
bude deliteľný 9, teda ak $x + y$ bude niektoré z čísel 4, 13 :
$$x + y \in \{4, 13\} \qquad (2)$$
(súčet $x + y$ nemôže byť väčší ako 18, pretože x aj y môžu byť nanajvýš 9).

Číslo $32x54y$ je teda deliteľné 36 práve vtedy, keď súčasne platí (1) a (2). Obidve podmienky sú splnené len v nasledujúcich 4 prípadoch :
$$x = 4\ ,\ y = 0\ ;\qquad x = 0\ ,\ y = 4\ ;$$
$$x = 9\ ,\ y = 4\ ;\qquad x = 5\ ,\ y = 8\ .$$

Číslo deliteľné 36 dostaneme len v týchto 4 prípadoch: 324540 (tj. $x = 4$, $y = 0$), 320544 ($x = 0$, $y = 4$), 329544 ($x = 9$, $y = 4$), 325548 ($x = 5$, $y = 8$).

Riešenie II (použitím postačujúcich podmienok)

Ak je číslo $32x54y$ deliteľné 36, je iste aj deliteľné 6, teda súčasne deliteľné 2 aj 3. Preto

- jeho ciferný súčet
$$3 + 2 + x + 5 + 4 + y = 14 + x + y$$
musí byť deliteľný 3, teda $x + y$ môže byť len niektoré z čísel 1, 4, 7, 10, 13, 16 (väčšie čísla už neprichádzajú do úvahy, pretože súčet $x + y$ nemôže byť väčší ako 18, keďže x aj y môžu nadobúdať nanajvýš hodnotu 9) :
$$x + y \in \{1, 4, 7, 10, 13, 16\}. \qquad (3)$$
- $32x54y$ musí byť párne číslo, teda y musí byť párne :
$$y \in \{0, 2, 4, 6, 8\}. \qquad (4)$$

V nasledujúcej tabuľke sú uvedené všetky dvojice $[x\,, y]$ cifier, ktoré spĺňajú súčasne podmienky (3) a (4); riešením našej úlohy môže byť len niektorá z týchto dvojíc.

x	y	hodnota podielu $\frac{32x54y}{36}$	x	y	hodnota podielu $\frac{32x54y}{36}$
1	0	321540 : 36 ≅ 8931,67	6	4	326544 : 36 ≅ 9070,67
4	**0**	**324540 : 36 = 9015**	**9**	**4**	**329544 : 36 = 9154**
7	0	327540 : 36 ≅ 9098,33	1	6	321546 : 36 ≅ 8931,83
2	2	322542 : 36 = 8959,5	4	6	324546 : 36 ≅ 9015,167
5	2	325542 : 36 ≅ 9042,83	7	6	327546 : 36 = 9098,5
8	2	328542 : 36 ≅ 9126,167	2	8	322548 : 36 ≅ 8959,67
0	**4**	**320544 : 36 = 8904**	**5**	**8**	**325548 : 36 = 9043**
3	4	323544 : 36 ≅ 8987,33	8	8	328548 : 36 ≅ 9126,33

Ak pre každú z takto nájdených dvojíc $[x\,,y]$ vypočítame na kalkulačke hodnotu podielu $\frac{32x54y}{36}$ (vypočítané hodnoty sú uvedené v tabuľke), zistíme, že len v 4 prípadoch je podiel celé číslo. Teda len v týchto 4 prípadoch je číslo $32x54y$ je deliteľné 36 (tieto priaznivé prípady sú v tabuľke zvýraznené).

Číslo deliteľné 36 dostaneme len v týchto 4 prípadoch: 324540 (tj. $x=4$, $y=0$), 320544 ($x=0$, $y=4$), 329544 ($x=9$, $y=4$), 325548 ($x=5$, $y=8$).

Poznámka. Namiesto deliteľnosti 6 môže žiak zvoliť niektorú inú postačujúcu podmienku pre deliteľnosť číslom 36, napr.

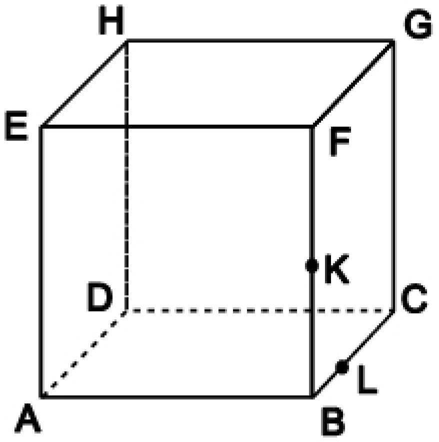
- deliteľnosť 9, v takom prípade by musel preveriť všetky dvojice $[x\,,y]$ spĺňajúce podmienku (2), tj. $x+y\in\{4,13\}$, teda dvojice
$$[0\,,4],\ [1\,,3],\ [2\,,2],\ [3\,,1],\ [4\,,0],\ [4\,,9],\ [5\,,8],\ [6\,,7],\ [7\,,6],\ [8\,,5],\ [9\,,4]\ ;$$
- deliteľnosť 4, v takom prípade by musel preveriť všetky dvojice $[x\,,y]$ spĺňajúce podmienku (1), tj. $y\in\{0,4,8\}$, teda 30 dvojíc
$$[0\,,0],\ [1\,,0],\ [2\,,0],\ [3\,,0],\ \ldots,\ [9\,,0],$$
$$[0\,,4],\ [1\,,4],\ [2\,,4],\ [3\,,4],\ \ldots,\ [9\,,4],$$
$$[0\,,8],\ [1\,,8],\ [2\,,8],\ [3\,,8],\ \ldots,\ [9\,,8].$$

V extrémnom prípade sa žiak môže pokúsiť preveriť deliteľnosť 36-imi pre všetkých 100 prvkov množiny $\{[x\,,y];\,x,y\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\}$.

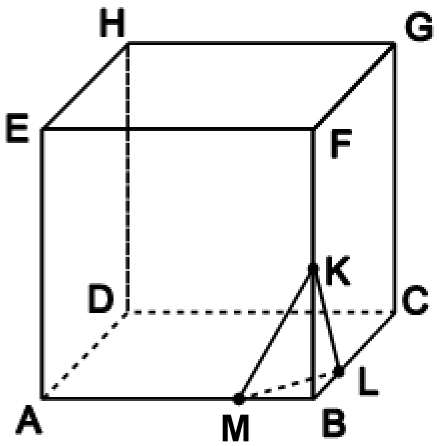
Hodnotenie
(4 body)

- za každé zo 4 riešení úlohy **po 0,5 boda**
- ak žiak použil postup, ktorý umožňuje nájdenie všetkých riešení **2 body**
(*napr. žiak uviedol podmienky (1) a (2) alebo uviedol niektorú postačujúcu podmienku a z jeho postupu je zrejmé, že preveroval všetky dvojice cifier vyhovujúce tejto podmienke, alebo preveril <u>všetkých 100</u> prvkov množiny* $\{[x\,,y];\,x,y\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\}$)
    - ak žiak uviedol niektorú postačujúcu podmienku pre deliteľnosť 36-imi, ale z jeho postupu <u>nie je</u> zrejmé, že preveroval všetky dvojice cifier vyhovujúce tejto podmienke, prideľte z týchto 2 bodov **1 bod**
    - ak žiak nepreveril deliteľnosť 36-imi pre všetkých 100 prvkov množiny $\{[x\,,y];\,x,y\in\{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9\}\}$, ale z jeho postupu je zrejmé, že pri tomto preverovaní zvolil nejaký systém (*teda nepreveroval len náhodne zvolené dvojice cifier x, y*), prideľte z týchto 2 bodov **1 bod**

5a) Je daná kocka $ABCDEFGH$ s hranou dĺžky 4. Nech bod K je stred hrany BF a bod L nech leží vnútri hrany BC tak, že $|BL| = 1$. Do obrázka v zadaní narysujte rez kocky rovinou β, ktorá obsahuje body K, L a je rovnobežná s priamkou EG. Vypočítajte aj plošný obsah tohto rezu. (*5 bodov*)



Riešenie



Rez kocky $ABCDEFGH$ rovinou β je rovnoramenný trojuholník KLM (rovnosť $|KM| = |KL|$ vyplýva napr. z podobnosti trojuholníkov MLB a EGF).

Plošný obsah tohto trojuholníka môžeme vypočítať viacerými spôsobmi:

- (*použitím Heronovho vzorca*)
  Z pravouhlého trojuholníka KBL dostávame použitím Pytagorovej vety
  $$|KL| = \sqrt{|KB|^2 + |BL|^2} = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}\,; \qquad (1)$$
  podobne z pravouhlého trojuholníka MBL máme
  $$|ML| = \sqrt{|MB|^2 + |BL|^2} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}\,.$$
  Podľa Heronovho vzorca
  $$P = \frac{1}{4}\sqrt{(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)}$$
  je potom obsah trojuholníka KLM

$$P=\frac{1}{4}\sqrt{\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(-\sqrt{5}+\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}-\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{5}+\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)}=$$

$$=\frac{1}{4}\sqrt{2\cdot\left[\left(2\sqrt{5}+\sqrt{2}\right)\cdot\left(2\sqrt{5}-\sqrt{2}\right)\right]}=\frac{1}{4}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{\left(2\sqrt{5}\right)^2-\left(\sqrt{2}\right)^2}=$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{20-2}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{18}=\frac{\sqrt{2}}{4}\cdot\sqrt{2\cdot 9}=\frac{3}{2}.$$

- (*výpočtom výšky na stranu ML*)
  V pravouhlom rovnoramennom trojuholníku MBL označme K' stred strany ML. Potom
  $$|ML|=\sqrt{|MB|^2+|BL|^2}=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$
  a
  $$|BK'|=\sqrt{|MB|^2-\left(\frac{|ML|}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}.$$
  V trojuholníku KLM je úsečka $K'K$ výškou na stranu LM, jej veľkosť vypočítame z pravouhlého trojuholníka $BK'K$:
  $$|KK'|=\sqrt{|BK'|^2+|BK|^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+4}=\frac{3}{\sqrt{2}}.$$
  Plošný obsah trojuholníka KLM potom je
  $$P=\frac{1}{2}|ML|\cdot|KK'|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}=\frac{3}{2}.$$
- (*analyticky*)
  Zvoľme v priestore súradnicovú sústavu; napríklad tak, aby platilo $B[0,0,0]$, $A[-4,0,0]$, $C[0,4,0]$, $F[0,0,4]$. Potom body M, L, K majú súradnice $M[-1,0,0]$, $L[0,1,0]$, $K[0,0,2]$. Obsah trojuholníka KLM môžeme vypočítať pomocou vzorca
  $$P=\frac{1}{2}|KL|\cdot|KM|\cdot\sin(\angle LKM)=\frac{1}{2}|KL|^2\cdot\sin(\angle LKM), \qquad (2)$$
  veľkosti $|KL|$ a $\sin(\angle LKM)$ môžeme pritom vypočítať nasledovne:
  - $|KL|$ ako vzdialenosť bodov $K[0,0,2]$ a $L[0,1,0]$:
    $$|KL|=\sqrt{(0-0)^2+(1-0)^2+(0-2)^2}=\sqrt{5}\ ; \qquad (3)$$
  - $\sin(\angle LKM)$ pomocou kosínusu, ten nájdeme pomocou skalárneho súčinu vektorov $L-K=(0,1,-2)$ a $M-K=(-1,0,-2)$:
    $$\cos(\angle LKM)=\frac{(L-K)\cdot(M-K)}{|L-K|\cdot|M-K|}=\frac{(0,1,-2)\cdot(-1,0,-2)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}}=\frac{4}{5},$$
    odtiaľ
    $$\sin(\angle LKM)=\sqrt{1-\cos^2(\angle LKM)}=\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\frac{3}{5}. \qquad (4)$$

  Dosadením (3) a (4) do (2) dostaneme
  $$P=\frac{1}{2}\cdot 5\cdot\frac{3}{5}=\frac{3}{2}.$$

Rezom je rovnoramenný trojuholník *KLM* (pozri obrázok), plošný obsah rezu je $\frac{3}{2}$.

Poznámka. Plochu trojuholníka *KLM* je možné nájsť aj pomocou vektorového súčinu vektorov $L-K=(0,1,-2)$ a $M-K=(-1,0,-2)$:

$$P=\frac{1}{2}\cdot\left|(L-K)\times(M-K)\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|\det\begin{pmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 1 & -2\\ -1 & 0 & -2\end{pmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot\left|-2\mathbf{i}+2\mathbf{j}+\mathbf{k}\right|=$$

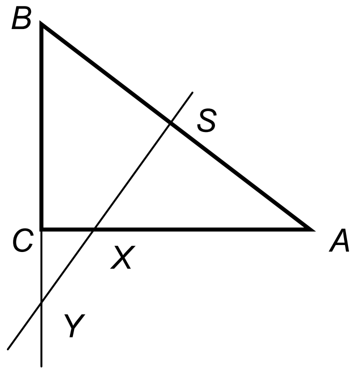
$$=\frac{1}{2}\cdot\left|(-2,2,1)\right|=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{(-2)^2+2^2+1^2}=\frac{3}{2}.$$

Hodnotenie
(5 bodov)

• za správne narysovaný rez	**1,5 boda**
• za výpočet veľkosti niektorého prvku (*strana, výška, uhol alebo niektorá trigonometrická funkcia uhla, súradnice niektorého z vektorov L-K, M-K, L-M*) trojuholníka *KLM*	**1 bod**
• ak žiak uviedol správny vzorec na výpočet obsahu trojuholníka *KLM* *tento 1 bod prideľte **len vtedy**, keď žiak súčasne vypočítal veľkosť niektorého prvku trojuholníka KLM vyskytujúceho sa v tomto vzorci*	**1 bod**
• za výpočet veľkosti ďalšieho prvku trojuholníka *KLM* vyskytujúceho sa v žiakom uvedenom vzorci na výpočet obsahu tohto trojuholníka	**0,5 boda**
• za správne vypočítaný obsah trojuholníka *KLM*	**1 bod**
o ak žiak postupoval pri výpočte správne, ale v dôsledku zaokrúhľovania nedostal presný výsledok $\frac{3}{2}$, prideľte z tohto 1 boda **0,5 boda**	

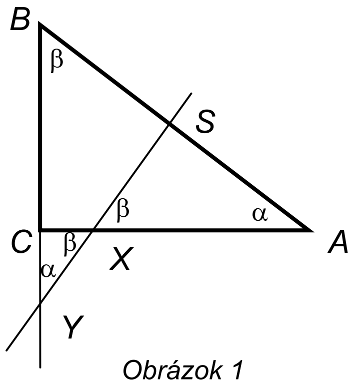
5b) V pravouhlom trojuholníku ABC ($|AC| = 8\ cm$, $|BC| = 6\ cm$ a uhol ACB je $90°$) je zostrojená kolmica na preponu AB prechádzajúca jej stredom S. Táto kolmica pretína odvesnu AC v bode X a priamku BC v bode Y. Vypočítajte veľkosť úsečky XY.

(*5 bodov*)



Poznámka: Tento príklad je možné riešiť napríklad využitím podobnosti alebo pomocou analytickej geometrie.

Riešenie I (podobnosťou)



Obrázok 1

Pravouhlé trojuholníky ABC, YBS, AXS a YXC sú podobné (majú totiž rovnaké uhly pri sebezodpovedajúcich vrcholoch, pozri obr. 1). Z podobnosti prvých troch uvedených trojuholníkov vyplýva

$$|AB| : |AC| : |BC| = |YB| : |YS| : |BS| = |AX| : |AS| : |XS| .$$

Ak do tejto rovnosti dosadíme známe veľkosti strán, tj.

$$|AC| = 8\,,\ |BC| = 6\,,\ |AB| = 10\,,\ |AS| = |BS| = 5$$

(dĺžku AB sme vypočítali pomocou Pytagorovej vety, $|AS|$ aj $|BS|$ je podľa zadania polovica z $|AB|$), dostaneme

$$10 : 8 : 6 = |YB| : |YS| : 5 = |AX| : 5 : |XS| . \qquad (1)$$

Na výpočet $|XY|$ si môžeme vybrať niektorý z nasledujúcich postupov:

a) *$|XY|$ vypočítame ako rozdiel $|XY| = |YS| - |XS|$, pritom $|YS|$ vypočítame na základe podobnosti trojuholníkov ABC a BSY a $|XS|$ na základe podobnosti trojuholníkov ABC a AXS*

Z pomeru (1) vyplýva, že dĺžky strán trojuholníka YBS sú $\frac{5}{6}$ - násobok dĺžok zodpovedajúcich strán trojuholníka ABC, preto

$$|YS| = \frac{5}{6} \cdot 8 = \frac{20}{3} . \qquad (2)$$

Rovnako z uvedeného pomeru vyplýva, že dĺžky strán trojuholníka AXS sú $\frac{5}{8}$ - násobok dĺžok zodpovedajúcich strán trojuholníka ABC, preto

$$|XS| = \frac{5}{8} \cdot 6 = \frac{15}{4} . \qquad (3)$$

Potom $$|XY| = |YS| - |XS| = \frac{20}{3} - \frac{15}{4} = \frac{35}{12} .$$

b) *najprv vypočítame dĺžku $|CX|$ ako rozdiel $|CX| = |AC| - |AX|$, pritom $|AX|$ vypočítame na základe podobnosti trojuholníkov ABC a AXS, potom vypočítame $|XY|$ na základe podobnosti trojuholníka YXC s niektorým z trojuholníkov ABC, YBS, AXS*

Z pomeru (1) vyplýva, že dĺžky strán trojuholníka *AXS* sú $\frac{5}{8}$ - násobok dĺžok zodpovedajúcich strán trojuholníka *ABC*, preto

$$|AX| = \frac{5}{8} \cdot 10 = \frac{25}{4} . \tag{4}$$

Potom $$|CX| = |AC| - |AX| = 8 - \frac{25}{4} = \frac{7}{4} .$$

Z podobnosti trojuholníkov *YXC* a *ABC* vyplýva

$$\frac{|XY|}{|CX|} = \frac{|BA|}{|CB|}, \text{ tj. } \frac{|XY|}{\frac{7}{4}} = \frac{10}{6} , \tag{5}$$

odtiaľ $$|XY| = \frac{7}{4} \cdot \frac{10}{6} = \frac{35}{12} .$$

c) *najprv vypočítame dĺžku $|CY|$ ako rozdiel $|CY| = |YB| - |BC|$, pritom $|YB|$ vypočítame na základe podobnosti trojuholníkov ABC a YBS, potom vypočítame $|XY|$ na základe podobnosti trojuholníka YXC s niektorým z trojuholníkov ABC, YBS, AXS*

Z pomeru (1) vyplýva, že dĺžky strán trojuholníka *YBS* sú $\frac{5}{6}$ - násobok dĺžok zodpovedajúcich strán trojuholníka *ABC*, preto

$$|YB| = \frac{5}{6} \cdot 10 = \frac{25}{3} . \tag{6}$$

Potom $$|CY| = |YB| - |BC| = \frac{25}{3} - 6 = \frac{7}{3} .$$

Z podobnosti trojuholníkov *YXC* a *ABC* vyplýva

$$\frac{|XY|}{|CY|} = \frac{|BA|}{|CA|}, \text{ tj. } \frac{|XY|}{\frac{7}{3}} = \frac{10}{8} , \tag{7}$$

odtiaľ $$|XY| = \frac{7}{3} \cdot \frac{10}{8} = \frac{35}{12} .$$

d) *$|XY|$ vypočítame na základe Pytagorovej vety ako $|XY| = \sqrt{|CY|^2 + |CX|^2}$, pritom $|CX|$ vypočítame ako rozdiel $|CX| = |AC| - |AX|$ ($|AX|$ nájdeme na základe podobnosti trojuholníkov ABC a AXS) a $|CY|$ vypočítame ako rozdiel $|CY| = |YB| - |BC|$ ($|YB|$ nájdeme na základe podobnosti trojuholníkov ABC a YBS).*

Z pomeru (1) vyplýva, že dĺžky strán trojuholníka *YBS* sú $\frac{5}{6}$ - násobok dĺžok zodpovedajúcich strán trojuholníka *ABC*, preto

$$|YB| = \frac{5}{6} \cdot 10 = \frac{25}{3},$$

odtiaľ $$|CY| = |YB| - |BC| = \frac{25}{3} - 6 = \frac{7}{3}.$$

Rovnako z uvedeného pomeru vyplýva, že dĺžky strán trojuholníka *AXS* sú $\frac{5}{8}$ - násobok dĺžok zodpovedajúcich strán trojuholníka *ABC*, preto

$$|AX| = \frac{5}{8} \cdot 10 = \frac{25}{4},$$

odtiaľ $$|CX| = |AC| - |AX| = 8 - \frac{25}{4} = \frac{7}{4}.$$

Potom $$|XY| = \sqrt{|CY|^2 + |CX|^2} = \sqrt{\left(\frac{7}{3}\right)^2 + \left(\frac{7}{4}\right)^2} = \frac{35}{12}.$$

Veľkosť úsečky *XY* je $\frac{35}{12}$ (cm).

Poznámka. Rovnosti (2) až (7) môžeme vyjadriť aj použitím goniometrických funkcií[2]. Označme $\alpha = \angle BAC$ (pozri obrázok 1), z pravouhlého trojuholníka *ABC* máme :

$$\sin\alpha = \frac{|BC|}{|AB|} = \frac{6}{10}, \quad \cos\alpha = \frac{|AC|}{|AB|} = \frac{8}{10}, \quad \tan\alpha = \frac{|BC|}{|AC|} = \frac{6}{8}.$$

Potom

- v pravouhlom trojuholníku *YBS* platí $\tan\alpha = \frac{|BS|}{|YS|}$, $\sin\alpha = \frac{|BS|}{|YB|}$, preto

  $$|YS| = \frac{|BS|}{\tan\alpha} = \frac{5}{\frac{6}{8}} = \frac{20}{3}, \quad |YB| = \frac{|BS|}{\sin\alpha} = \frac{5}{\frac{6}{10}} = \frac{25}{3},$$

  čo sú rovnosti (2) a (6);
- v pravouhlom trojuholníku *AXS* platí $\tan\alpha = \frac{|XS|}{|AS|}$, $\cos\alpha = \frac{|AS|}{|AX|}$, preto

  $$|XS| = |AS| \cdot \tan\alpha = 5 \cdot \frac{6}{8} = \frac{15}{4}, \quad |AX| = \frac{|AS|}{\cos\alpha} = \frac{5}{\frac{8}{10}} = \frac{25}{4},$$

  čo sú rovnosti (3) a (4);
- v pravouhlom trojuholníku *YXC* platí

  $$\sin\alpha = \frac{|CX|}{|XY|} = \frac{6}{10}, \quad \cos\alpha = \frac{|CY|}{|XY|} = \frac{8}{10},$$

  čo sú vlastne rovnosti (5) a (7).

[2] Namiesto označenia tg používame označenie tan

Pomocou trigonometrických funkcií by sme teda napr. výpočet z riešenia Ia) mohli zapísať takto:

$$|XY| = |YS| - |XS| = \frac{|BS|}{\tan\alpha} - |AS| \cdot \tan\alpha = \frac{5}{\frac{6}{8}} - 5 \cdot \frac{6}{8} = \frac{20}{3} - \frac{15}{4} = \frac{35}{12}\ .$$

Riešenie II (analyticky)

Zvoľme v rovine súradnicovú sústavu, napr. tak, aby os x bola priamka CA a os y priamka CB. Body A, B, C budú mať súradnice $A[8,0]$, $B[0,6]$, $C[0,0]$.

Potom súradnice bodu $S = \frac{A+B}{2}$ budú $S[4,3]$ a rovnica priamky p prechádzajúcej bodom S kolmo na AB bude mať tvar

$$p: -4x + 3y + 7 = 0$$

(vektor $B - A = (-8,6)$ je normálový vektor priamky p, preto jej rovnica má tvar $-8x + 6y + c = 0$, dosadením súradníc bodu S do tejto rovnice dostávame $c = 14$).

Bod X je priesečník priamky p s osou x, jeho x-ovú súradnicu preto dostaneme dosadením $y = 0$ do rovnice priamky p :

$$-4x + 7 = 0\ , \text{ odtiaľ } \ x = \frac{7}{4},$$

teda

$$X\left[\frac{7}{4}, 0\right].$$

Bod Y je priesečník priamky p s osou y, jeho y-ovú súradnicu dostaneme dosadením $x = 0$ do rovnice priamky p :

$$3y + 7 = 0\ , \text{ odtiaľ } \ y = -\frac{7}{3},$$

teda

$$Y\left[0, -\frac{7}{3}\right].$$

Hľadaná dĺžka úsečky XY je potom

$$|XY| = \sqrt{\left(\frac{7}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{3}\right)^2} = \frac{35}{12}.$$

Veľkosť úsečky XY je $\frac{35}{12}$ (cm).

Hodnotenie
(5 bodov)

Riešenie I

- ak žiak v svojom riešení skonštatoval podobnosť aspoň 2 z trojuholníkov ABC, YBS, AXS a YXC . **2 body**
  tieto 2 body prideľte, ak žiak buď v svojom riešení napíše, že niektoré z uvedených trojuholníkov sú podobné, alebo ak je z jeho postupu alebo zápisu zrejmé, že si uvedenú podobnosť uvedomuje
- ak žiak vypočítal dĺžku aspoň 2 z úsečiek AX, SX, BY, SY, CX, CY, pričom jedna z týchto úsečiek je stranou jedného z trojuholníkov ASX, BSY, CXY a druhá je stranou niektorého iného z týchto trojuholníkov **2 body**
  - o ak žiak vypočítal dĺžku len jednej z uvedených úsečiek alebo vypočítal len dĺžku dvoch takých úsečiek, ktoré sú obidve stranami toho istého z trojuholníkov ASX, BSY, CXY, prideľte z týchto 2 bodov **1 bod**
- za dĺžku úsečky XY získanú správnym postupom **1 bod**

Riešenie II

- za rovnicu priamky p **2 body**
  - o ak žiak nenapísal rovnicu priamky p, ale v jeho riešení je uvedený niektorý údaj, ktorý je súčasťou postupu hľadania tejto rovnice (súradnice bodu S, súradnice smerového vektora priamky AB, rovnica priamky AB alebo jej smernica), prideľte z týchto 2 bodov **1 bod**
- za súradnice bodu X **1 bod**
- za súradnice bodu Y **1 bod**
- za dĺžku úsečky XY získanú správnym postupom **1 bod**

Test z matematiky MAA– variant 1337

MATURITA 2005

EXTERNÁ ČASŤ

M A T E M A T I K A

úroveň A

kód testu 1337

NEOTVÁRAJTE, POČKAJTE NA POKYN!
PREČÍTAJTE SI NAJPRV POKYNY K TESTU!

- Test obsahuje **30 úloh**.
- V teste sa stretnete s dvoma typmi úloh:
  - Pri úlohách s krátkou odpoveďou napíšte jednotlivé číslice výsledku do príslušných políčok odpoveďového hárka. Rešpektujte pritom predtlačenú polohu desatinnej čiarky.
  - Pri úlohách s výberom odpovede vyberte správnu odpoveď spomedzi niekoľkých ponúkaných možností, z ktorých je vždy správna iba jedna. Správnu odpoveď zaznačte krížikom do príslušného políčka odpoveďového hárka.
- Z hľadiska hodnotenia sú všetky úlohy rovnocenné.
- Na vypracovanie testu budete mať **120 minút**.
- Pri práci smiete používať iba písacie potreby, kalkulačku a prehľad vzorcov, ktorý je súčasťou tohto testu. Nesmiete používať zošity, učebnice ani inú literatúru.
- Poznámky si robte na pomocný papier. Na obsah pomocného papiera sa pri hodnotení neprihliada.
- **Podrobnejšie pokyny na vypĺňovanie odpoveďového hárka sú na poslednej strane testu. Prečítajte si ich.**
- Pracujte rýchlo, ale sústreďte sa.

Želáme Vám veľa úspechov!

Začnite pracovať, až keď dostanete pokyn!

Časť I

Vyriešte úlohy **01** – **20** *a do odpoveďového hárka zapíšte vždy* ***iba výsledok*** *– nemusíte ho zdôvodňovať ani uvádzať postup, ako ste k nemu dospeli.*

- *Výsledok zapisujte do odpoveďového hárka* **pomocou desatinných čísel.**
- *Pri zápise rešpektujte predtlačenú polohu desatinnej čiarky.*
- *Znamienko* **–** (*mínus*) *napíšte do samostatného políčka pred prvú číslicu.*
- *Označenie jednotiek (stupne, metre, minúty, …)* ***nezapisujte*** *do odpoveďového hárka.*
- *Ak je Váš výsledok celé číslo, nevypĺňajte políčka za desatinnou čiarkou.*

Napríklad

výsledok –33,1 *zapíšte* [ ][ ][–][3][3] , [1][ ][ ][ ]

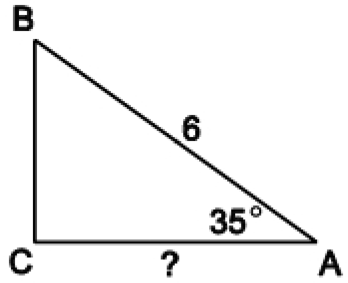
výsledok 5 *zapíšte* [ ][ ][ ][ ][5] , [ ][ ][ ][ ]

výsledok 427,19 *zapíšte* [ ][ ][4][2][7] , [1][9][ ][ ]

01 Z dreva sa získa 45 % buničiny a z nej 60 % papiera. Koľko ton papiera sa vyrobí z 300 ton dreva?

02 V pravouhlom trojuholníku ABC je $|AB| = 6,\ \alpha = 35°$. Vypočítajte dĺžku strany AC, výsledok uveďte zaokrúhlený na 1 desatinné miesto.

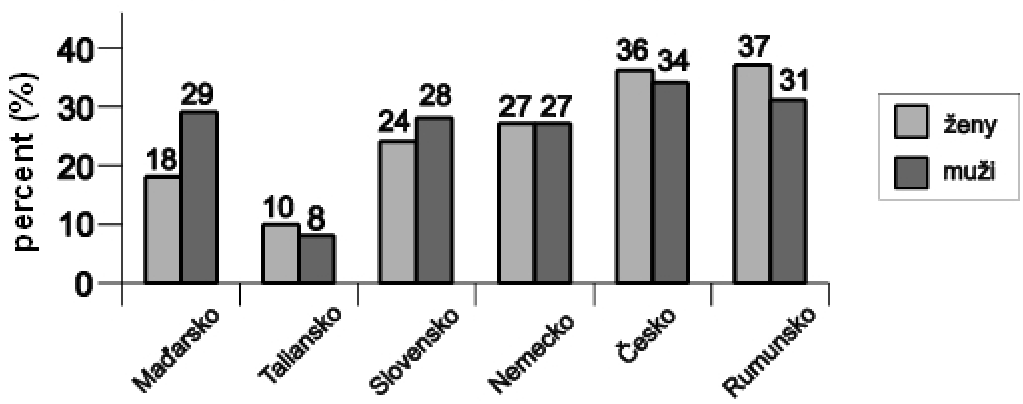
<u>Poznámka</u>: Zaokrúhlite len vypočítanú dĺžku strany AC, <u>nezaokrúhľujte</u> čísla, ktoré používate pri medzivýpočtoch.

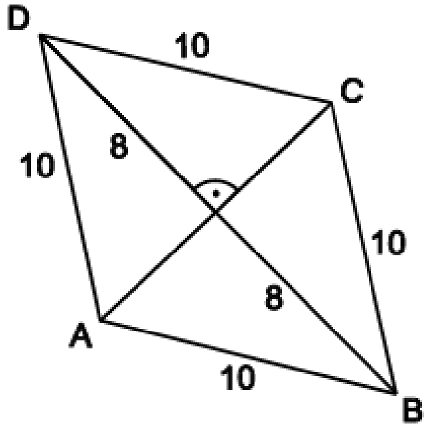
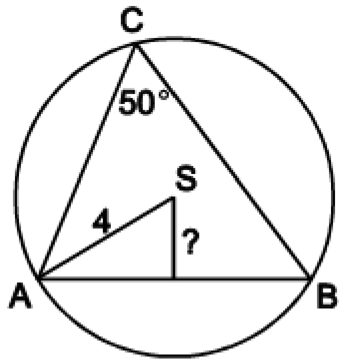


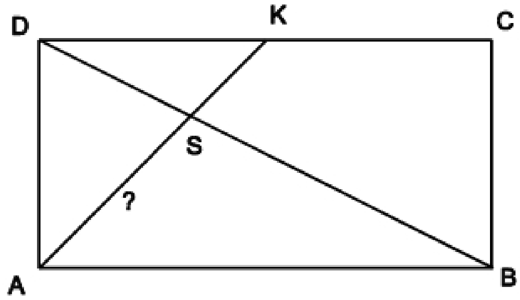
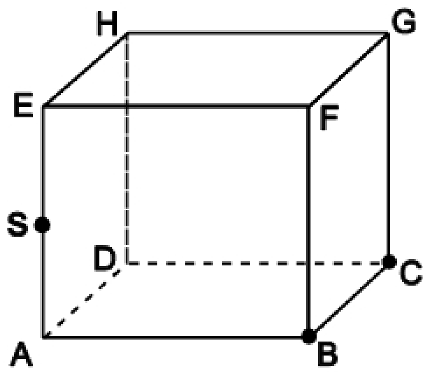
03 V pravidelnom n-uholníku má vnútorný uhol veľkosť $144°$. Nájdite číslo n udávajúce počet strán tohto mnohouholníka.

04 Dospelú populáciu na Slovensku tvorí 2 250 tisíc žien a 2 075 tisíc mužov. Na základe nasledujúcej tabuľky uverejnenej v dennej tlači vypočítajte (v tisíckach), koľko dospelých ľudí na Slovensku trpí obezitou.

Percento dospelej populácie trpiace obezitou



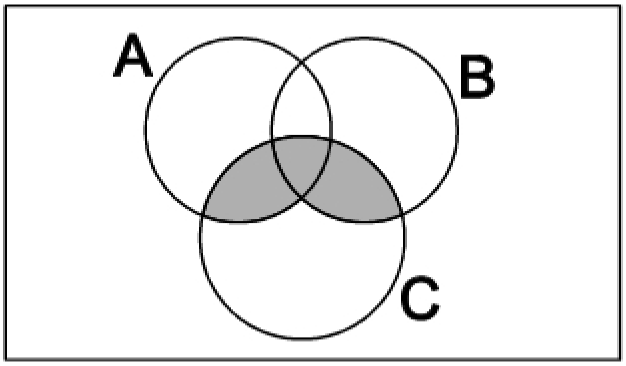
05	Daných je 5 celých čísel, ktoré sú v pomere 1 : 2 : 3 : 4 : 5. Ich aritmetický priemer je 12. Určte najmenšie z týchto čísel.
06	V obchode majú 12 druhov pohľadníc. Koľkými spôsobmi môžeme kúpiť 4 rôzne pohľadnice, ak na poradí, v akom pohľadnice kupujeme, <u>nezáleží</u>?
07	Rovnica $\lvert 2x-6\rvert = 3x-4$ má jediný koreň. Určte ho.
08	Nájdite koreň rovnice $2^{x+3} - 4\cdot 2^{x} = \frac{1}{2}$.
09	Vypočítajte obsah štvoruholníka $ABCD$ znázorneného na obrázku. 
10	Obvodový uhol patriaci k oblúku AB kružnice s polomerom 4 cm má veľkosť 50°. Aká je vzdialenosť tetivy AB od stredu S tejto kružnice? Výsledok uveďte v centimetroch s presnosťou na dve desatinné miesta. 
11	Pre akú hodnotu a sú priamky $p: ax-6y+2=0$ a $q: 3x+8y+a=0$ navzájom kolmé?
12	Aká je hodnota čísla a, ak viete, že množinou všetkých koreňov nerovnice $x^2+ax-6<0$ je interval $(-2\,;3)$?
13	Určte počet priesečníkov grafu funkcie $f: y=(x^2-1).(4x^2+4x+1)$ so súradnicovou osou x.
14	Riešením sústavy $\begin{aligned} x+2y+2z&=5\\ 2x-y+3z&=3\\ x+y+2z&=4\end{aligned}$ je jediná usporiadaná trojica čísel $[x\,;y\,;z]$. Aká je hodnota neznámej z?

15	V obdĺžniku *ABCD* je *K* stred strany *CD*, *S* je priesečník úsečiek *AK* a *BD*. Vypočítajte veľkosť $\lvert AS \rvert$, ak viete, že $\lvert AK \rvert = 9$. 
16	Jednu základňu lichobežníka *ABCD* tvoria body $A[2\,;\,4]$ a $B[3\,;\,6]$, druhú body $C[1\,;\,5]$ a $D[e\,;\,f]$. Určte číslo *e*, ak viete, že $\overrightarrow{DC} = 2.\overrightarrow{AB}$.
17	Kocka *ABCDEFGH* má hranu dĺžky 4 cm. Označme *S* stred hrany *AE*. Vypočítajte v štvorcových centimetroch obsah rezu tejto kocky rovinou *BCS*. Výsledok uveďte zaokrúhlený na jedno desatinné miesto. *<u>Poznámka</u>: Zaokrúhlite len vypočítaný obsah, <u>nezaokrúhľujte</u> čísla, ktoré používate pri medzivýpočtoch.* 
18	Akú veľkosť má uhol priamky $p: x = 1 + t,\ \ y = -2 + t,\ \ z = 2 - t\ \ (t \in R)$ a roviny $x - y - z - 7 = 0$? Výsledok uveďte s presnosťou na celé stupne.
19	Pre vhodné čísla *A*, *B* sa funkcia $y = 4x^2 + 4x - 3$ rovná funkcii $y = A(x-1)(x+2) + B$. Určte hodnotu čísla *B*.
20	Graf lineárnej lomenej funkcie $y = \dfrac{x+3}{2x-8}$ je súmerný podľa stredu $S[m\,,\,n]$. Nájdite a do odpoveďového hárka zapíšte číslo *m*.

Časť II

V každej z úloh **21** *až* **30** *je správna práve jedna z ponúkaných odpovedí* **(A)** *až* **(E)**. *Svoju odpoveď zaznačte krížikom v príslušnom políčku odpoveďového hárka.*

21 Ktorá z nasledujúcich množín je vyznačená na diagrame na obrázku ?



(A) $(A \cap C) \cup B$

(B) $(A \cap B) \cup C$

(C) $(A \cup B) \cap C$

(D) $(A \cup C) \cap B$

(E) $(B \cup C) \cap A$

22 Funkcia $f: y = 3^x - 2$ je

(A) zdola ohraničená, zhora neohraničená a klesajúca.

(B) zdola ohraničená, zhora neohraničená a rastúca.

(C) zdola neohraničená, zhora ohraničená a klesajúca.

(D) zdola neohraničená, zhora ohraničená a rastúca.

(E) neohraničená zdola aj zhora a rastúca.

23 Ak $\log_a x = t$, tak

(A) $x = a^t$. **(B)** $x = t^a$. **(C)** $a = x^t$. **(D)** $a = t^x$. **(E)** $t = x^a$.

24 V trojuholníku ABC ležia oproti stranám a, b, c uhly α, β, γ (v tomto poradí). Ak $\alpha = 35°$ a $\beta = 75°$, tak pre veľkosti strán tohto trojuholníka platí:

(A) $a < b < c$. **(B)** $a < c < b$.

(C) $b < a < c$. **(D)** $b < c < a$.

(E) $c < a < b$.

25 Školská jedáleň kúpila a kg zemiakov po 15 Sk/kg. Koľko kg zemiakov by mohla kúpiť za tú istú sumu, ak by za 1 kg zaplatila o b Sk menej?

(A) $\frac{15 \cdot a}{b}$ **(B)** $\frac{15 \cdot a}{a-b}$ **(C)** $\frac{15-b}{a}$ **(D)** $(15-b) \cdot a$ **(E)** $\frac{15 \cdot a}{15-b}$

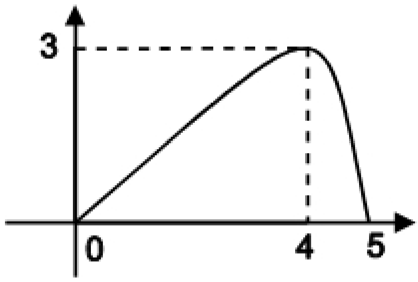
26 Máme dve kocky, modrú a červenú. Každou sme hodili jedenkrát. Aká je (s presnosťou na dve desatinné miesta) pravdepodobnosť, že práve na jednej z týchto kociek padla šestka?

(A) 0,03 **(B)** 0,14 **(C)** 0,17 **(D)** 0,28 **(E)** 0,33

27 Funkcia $y = 1 - (\cos x - \sin x)^2$ má pre každé $x \in R$ rovnakú hodnotu ako funkcia

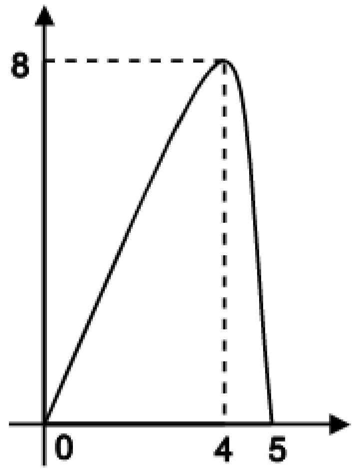
(A) $1 - \cos x$ **(B)** $\cos 2x$ **(C)** $\sin x$ **(D)** $1 - \sin x$ **(E)** $\sin 2x$

28 Na obrázku je graf funkcie $y = f(x)$.

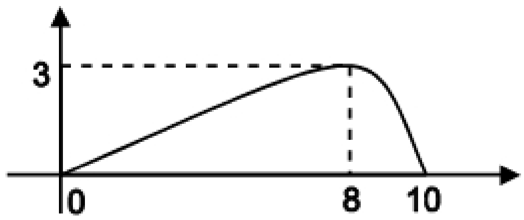


Na ktorom z nasledujúcich obrázkov je graf funkcie $y = f(x+5)$?

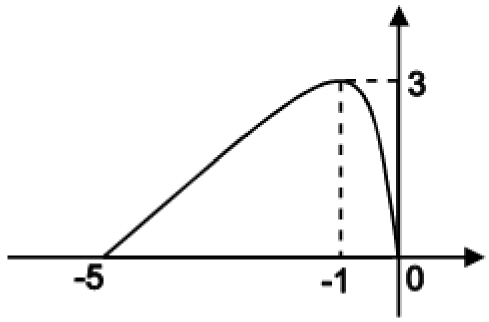
(A)



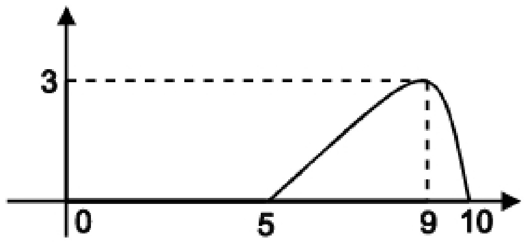
(B)



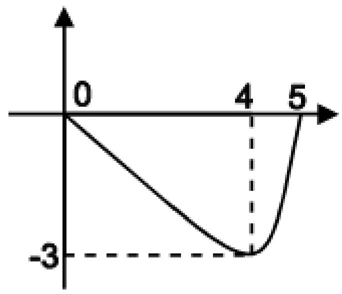
(C)



(D)



(E)



29 Ak zmenšíme polomer valca o 20 % a zároveň zväčšíme jeho výšku o 50 %, tak sa jeho objem

(A) zmenší o 4 %.
(B) zmenší o 10 %.
(C) zmenší o 40 %.
(D) zväčší o 4 %.
(E) zväčší o 30 %.

30 Ktoré z nasledujúcich tvrdení je pravdivé?

Ak $a > 1$, $b > 1$ sú dve rôzne prirodzené čísla, tak ich najmenší spoločný násobok

(A) je vždy menší ako väčšie z čísel *a, b*.
(B) je vždy väčší ako menšie z čísel *a, b*.
(C) sa vždy rovná menšiemu z čísel *a, b*.
(D) sa vždy rovná väčšiemu z čísel *a, b*.
(E) sa vždy rovná súčinu čísel *a, b*.

KONIEC TESTU

Prehľad vzorcov

Mocniny:

$a^x . a^y = a^{x+y}$ $\quad \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad (a^x)^y = a^{x.y}$ $\quad (a.b)^x = a^x . b^x$ $\quad \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$ $\quad a^{-x} = \frac{1}{a^x}$ $\quad a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

Goniometrické funkcie:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad \operatorname{tg} x = \frac{\sin x}{\cos x}$

$\sin 2x = 2.\sin x.\cos x$ $\quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Trigonometria:

Sínusová veta: $\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2r$

Kosínusová veta: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$

Logaritmus: $\log_z(x \cdot y) = \log_z x + \log_z y$ $\quad \log_z \frac{x}{y} = \log_z x - \log_z y$

$\log_z x^k = k.\log_z x$ $\quad \log_y x = \frac{\log_z x}{\log_z y}$

Aritmetická postupnosť: $a_n = a_1 + (n-1).d$ $\quad s_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Geometrická postupnosť: $a_n = a_1 . q^{n-1}$ $\quad s_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1},\ q \neq 1$

Kombinatorika: $P(n) = n!$ $\quad V(k,n) = \frac{n!}{(n-k)!}$ $\quad C(k,n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

$P'(n_1, n_2, \dots, n_k) = \frac{n!}{n_1!\, n_2! \dots n_k!}$ $\quad V'(k,n) = n^k$ $\quad C'(k,n) = \binom{n+k-1}{k}$

Geometrický priemer: $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$

Harmonický priemer: $\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n}}$

Analytická geometria:

Parametrické vyjadrenie priamky: $X = A + t\vec{u}$, $t \in R$

Všeobecná rovnica priamky: $ax + by + c = 0$; $[a; b] \neq [0; 0]$

Uhol vektorov: $\cos\varphi = \frac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$

Všeobecná rovnica roviny: $ax + by + cz + d = 0$; $[a; b; c] \neq [0; 0; 0]$

Stredový tvar rovnice kružnice: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$

Objemy a povrchy telies:

	kváder	valec	ihlan	kužeľ	guľa
objem	abc	$\pi r^2 v$	$\frac{1}{3} S_p v$	$\frac{1}{3}\pi r^2 v$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
povrch	$2(ab + ac + bc)$	$2\pi r(r + v)$	$S_p + Q$	$\pi r(r + s)$	$4\pi r^2$

MATURITA 2005
EXTERNÁ ČASŤ

MATEMATIKA

úroveň B
kód testu: 1353

NEOTVÁRAJTE, POČKAJTE NA POKYN!
PREČÍTAJTE SI NAJPRV POKYNY K TESTU!

- Test obsahuje **30 úloh**.
- V teste sa stretnete s dvoma typmi úloh:
  - Pri úlohách s krátkou odpoveďou napíšte jednotlivé číslice výsledku do príslušných políčok odpoveďového hárka. Rešpektujte pritom predtlačenú polohu desatinnej čiarky.
  - Pri úlohách s výberom odpovede vyberte správnu odpoveď spomedzi niekoľkých ponúkaných možností, z ktorých je vždy správna iba jedna. Správnu odpoveď zaznačte krížikom do príslušného políčka odpoveďového hárka.
- Z hľadiska hodnotenia sú všetky úlohy rovnocenné.
- Na vypracovanie testu budete mať **120 minút**.
- Pri práci smiete používať iba písacie potreby, kalkulačku a prehľad vzorcov, ktorý je súčasťou tohto testu. Nesmiete používať zošity, učebnice ani inú literatúru.
- Poznámky si robte na pomocný papier. Na obsah pomocného papiera sa pri hodnotení neprihliada.
- **Podrobnejšie pokyny na vypĺňovanie odpoveďového hárka sú na poslednej strane testu. Prečítajte si ich.**
- Pracujte rýchlo, ale sústreďte sa.

Želáme Vám veľa úspechov!

Začnite pracovať, až keď dostanete pokyn!

Časť I

Vyriešte úlohy **01** *–* **20** *a do odpoveďového hárka zapíšte vždy* ***iba výsledok*** *– nemusíte ho zdôvodňovať ani uvádzať postup, ako ste k nemu dospeli.*

- *Výsledok zapisujte do odpoveďového hárka* ***pomocou desatinných čísel.***
- *Pri zápise rešpektujte predtlačenú polohu desatinnej čiarky.*
- *Znamienko* **–** *(mínus) napíšte do samostatného políčka pred prvú číslicu.*
- *Označenie jednotiek (stupne, metre, minúty, …)* ***nezapisujte*** *do odpoveďového hárka.*
- *Ak je Váš výsledok celé číslo, nevypĺňajte políčka za desatinnou čiarkou.*
  Napríklad

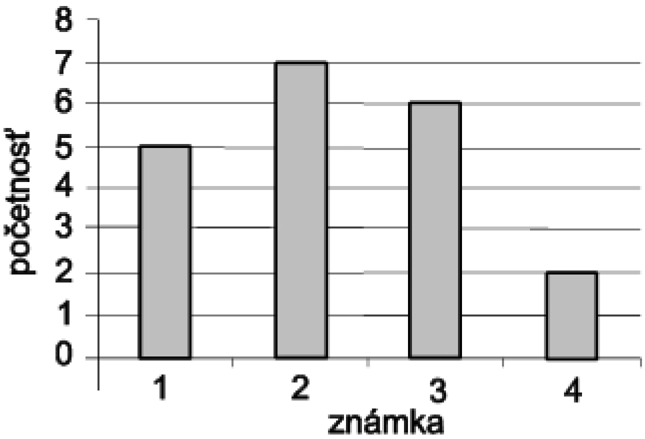
výsledok –33,1 *zapíšte* | | | – | 3 | 3 | , | 1 | | | |

výsledok 5 cm *zapíšte* | | | | | 5 | , | | | | |

výsledok 427,19° *zapíšte* | | | 4 | 2 | 7 | , | 1 | 9 | | |

01 V chladničke sú 3 rôzne ovocné jogurty. Koľkými spôsobmi možno z nej postupne vybrať 2 jogurty, ak záleží na poradí v akom jogurty vyberáme?

02 Graf znázorňuje, ako dopadla písomka z matematiky v 4. D. Aký je priemer známok z tejto písomky?



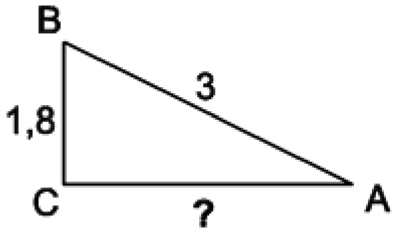
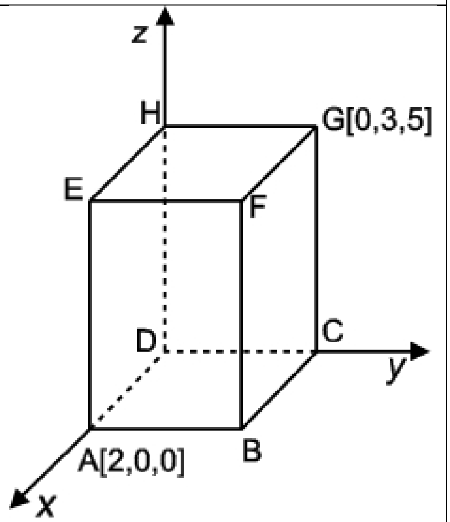
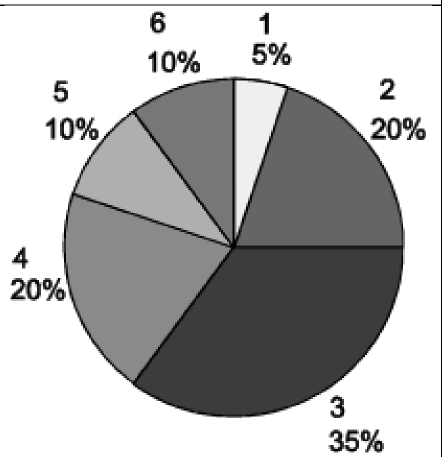
03 Dĺžky strán trojuholníka sú v pomere $7 : 6 : 4$. Najkratšia strana má 36 cm. Aký obvod (v centimetroch) má tento trojuholník?

04 Riešte nerovnicu $9 + 4x - 5(x - 1) > 0$. Do odpoveďového hárka napíšte, koľko riešení tejto nerovnice patrí do množiny celých kladných čísel.

05 Riešte sústavu $\begin{array}{l} x + 3y = 9 \\ 3x - y = 2 \end{array}$. Do odpoveďového hárka zapíšte <u>len</u> hodnotu neznámej *x*.

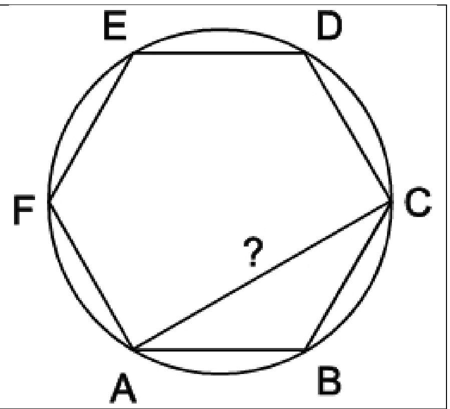
06 Ktoré <u>záporné</u> číslo je koreňom rovnice $3^{|x|} = 9$?

07 Nájdite riešenie (v stupňoch) rovnice $\cos x = \frac{1}{2}$ v intervale $(180° ; 360°)$.

08	V pravouhlom trojuholníku ABC sa $\lvert AB\rvert = 3, \lvert BC\rvert = 1{,}8$. Akú dĺžku má strana AC?  *<u>Poznámka</u>: Medzivýsledky ani vypočítanú dĺžku strany <u>nezaokrúhľujte</u>.*
09	Pre ktoré číslo a sú priamky $p: 3x - y = 0$ a $q: 6x + ay - 18 = 0$ rovnobežné?
10	V kvádri $ABCDEFGH$ poznáme súradnice bodov $D[0;0;0]$, $A[2;0;0]$ a $G[0;3;5]$. Bod $S[a;b;c]$ je stred hrany CG. Vypočítajte súradnice a, b, c bodu S a do odpoveďového hárka napíšte hodnotu súčtu $a + b + c$. 
11	Kruhový diagram zobrazuje výsledky hodov hracou kockou. Koľkokrát sa hádzalo kockou, ak viete, že štvorka padla štyrikrát? 
12	Pre ktoré číslo m má rovnica $x^2 + 2(m-3)x + m^2 - 21 = 0$ práve jedno riešenie?
13	Ktoré reálne číslo x je jediným riešením rovnice $\log_{10} 8 + \log_{10}(x-2) = \log_{10}(20-x)$?
14	Akú dĺžku má polomer kružnice určenej rovnicou $x^2 + y^2 - 6x + 8y - 24 = 0$?

15 Pravidelný šesťuholník *ABCDEF* je vpísaný do kruhu s polomerom 6 cm. Vypočítajte s presnosťou na dve desatinné miesta dĺžku jeho uhlopriečky *AC* (v cm).

<u>Poznámka</u>: Zaokrúhlite len vypočítanú dĺžku uhlopriečky, <u>nezaokrúhľujte</u> čísla, ktoré používate pri medzivýpočtoch.

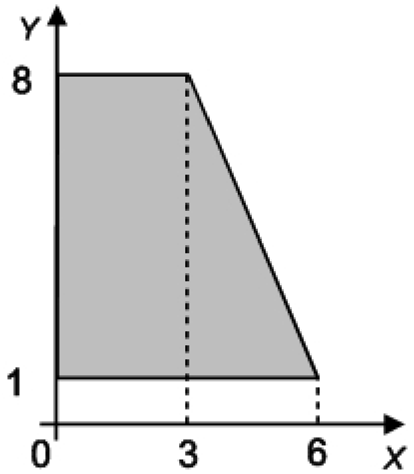


16 Dané sú body $A[3;8]$ a $B[7;16]$. Aká je vzdialenosť stredu úsečky *AB* od začiatku súradnicovej sústavy?

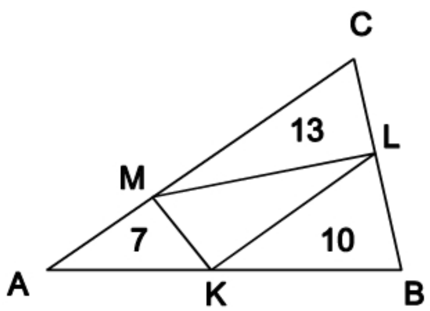
17 V parlamente z prítomných poslancov hlasovalo 80 %, z toho polovica bola za prijatie návrhu *A*. Koľko poslancov bolo prítomných na tomto hlasovaní, ak za prijatie návrhu *A* hlasovalo 36 poslancov?

18 V geometrickej postupnosti je prvý člen nenulový. Súčet prvého a tretieho člena je dvojnásobok súčtu prvých troch členov tejto postupnosti. Akú hodnotu má kvocient *q* tejto postupnosti?

19 Objem *V* zrezaného rotačného kužeľa počítame pomocou vzorca $V = \frac{1}{3}\pi v\left(R^2 + Rr + r^2\right)$, kde *v* je vzdialenosť hornej a dolnej podstavy zrezaného kužeľa, *R* je polomer dolnej podstavy a *r* polomer hornej podstavy. Otáčaním lichobežníka znázorneného na obrázku okolo osi *y* vznikne zrezaný rotačný kužeľ. Vypočítajte jeho objem. Pri výpočte použite namiesto π hodnotu $\frac{22}{7}$.



20 V trojuholníku *ABC* sú body *K*, *L*, v tomto poradí, stredmi strán *AB* a *BC*. Bod *M* leží na strane *AC*. Vypočítajte (v cm^2) obsah trojuholníka *KLM,* ak poznáte obsahy
$P_{KBL} = 10$ cm^2, $P_{AKM} = 7$ cm^2 a $P_{MLC} = 13$ cm^2.



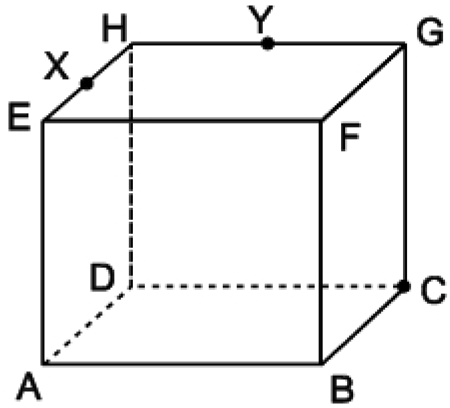
Časť II

V každej z úloh **21** *až* **30** *je správna práve jedna z ponúkaných odpovedí* **(A)** *až* **(E)**. *Svoju odpoveď zaznačte krížikom v príslušnom políčku odpoveďového hárka.*

21 Ktorú z uvedených číslic treba doplniť namiesto , aby číslo 111 222 333 666 77 bolo deliteľné 6?

(A) 0 **(B)** 2 **(C)** 4 **(D)** 6 **(E)** 8

22 V kocke *ABCDEFGH* označme *X* stred hrany *EH* a *Y* stred hrany *GH*. Ktorý z uvedených geometrických útvarov je rezom kocky *ABCDEFGH* rovinou *XYC*?



(A) trojuholník

(B) štvorec

(C) lichobežník

(D) päťuholník

(E) šesťuholník

23 Výraz $\sqrt{x^2 - 2xy + y^2}$ sa pre každé $x, y \in R$ rovná výrazu

(A) $x - y$. **(B)** $-x + y$. **(C)** $x + y$. **(D)** $|x + y|$. **(E)** $|x - y|$.

24 V klobúku sú 4 čierne a 4 biele guľky. Naraz vytiahneme 2 guľky. Aká je (s presnosťou na dve desatinné miesta) pravdepodobnosť, že obe budú biele?

(A) 0,14 **(B)** 0,21 **(C)** 0,25 **(D)** 0,28 **(E)** 0,50

25 Funkcia $y = \sin x$ má na intervale $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$ tento priebeh:

(A) rastie na $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a klesá na $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$.

(B) klesá na $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right\rangle$ a rastie na $\left\langle \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$.

(C) rastie na $\left\langle -\frac{\pi}{2}; 0 \right\rangle$ a na $\left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$, klesá na $\langle 0; \pi \rangle$.

(D) klesá na $\left\langle -\frac{\pi}{2}; 0 \right\rangle$ a na $\left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$, rastie na $\langle 0; \pi \rangle$.

(E) klesá na $\left\langle -\frac{\pi}{2}; \pi \right\rangle$ a rastie na $\left\langle \pi; \frac{3\pi}{2} \right\rangle$.

26 Z nasledujúcich výrokov vyberte negáciu výroku *„V tomto školskom roku každý maturant na Slovensku píše maturitné testy aspoň z 3 predmetov“*.

(A) V tomto školskom roku každý maturant na Slovensku píše maturitné testy najviac z 2 predmetov.

(B) V tomto školskom roku každý maturant na Slovensku píše maturitné testy najviac z 3 predmetov.

(C) V tomto školskom roku existuje na Slovensku aspoň jeden maturant, ktorý nepíše maturitné testy.

(D) V tomto školskom roku existuje na Slovensku aspoň jeden maturant, ktorý píše maturitné testy najviac z 2 predmetov.

(E) V minulom školskom roku existoval na Slovensku aspoň jeden maturant, ktorý písal maturitné testy najviac z 3 predmetov.

27 Aký predpis má inverzná funkcia f^{-1} k funkcii $f: y = 10^{x-1} + 1$?

(A) $f^{-1}: y = \log_{10}(x+1) - 1$

(B) $f^{-1}: y = \log_{10}(x-1) - 1$

(C) $f^{-1}: y = \log_{10} x + 1$

(D) $f^{-1}: y = \log_{10}(x+1) + 1$

(E) $f^{-1}: y = \log_{10}(x-1) + 1$

28 V trojuholníku *ABC* sa $|AB| = 4$, uhol $\alpha = \angle CAB$ má veľkosť 80° a uhol $\beta = \angle CBA$ veľkosť 40°. Aká je (s presnosťou na dve desatinné miesta) dĺžka strany *AC*?

(A) 5,39 **(B)** 4,55 **(C)** 3,52 **(D)** 2,97 **(E)** 2,61

29 Ak aritmetický priemer čísel a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 je číslo *A*, aritmetický priemer čísel a_1, a_2, a_3, a_4 je číslo *B*, tak $a_5 =$

(A) $5A - 4B$. **(B)** $A - B$. **(C)** $\frac{A}{5} - \frac{B}{4}$. **(D)** $\frac{A+B}{2}$. **(E)** $\frac{\frac{A}{5} + \frac{B}{4}}{9}$.

30 Označme *P* obsah rovnostranného trojuholníka a *o* jeho obvod. Aké je vyjadrenie obvodu *o* ako funkcie premennej *P*?

(A) $o = 6.\sqrt[4]{\frac{P}{3}}$

(B) $o = \frac{6\sqrt{P}}{\sqrt[4]{3}}$

(C) $o = \frac{6P}{\sqrt{3}}$

(D) $o = \frac{8P}{\sqrt{3}}$

(E) $o = 2.\sqrt{\frac{2P}{3}}$

KONIEC TESTU

Prehľad vzorcov

Mocniny:

$a^x.a^y = a^{x+y}$ $\quad \dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$ $\quad (a^x)^y = a^{x.y}$ $\quad (a.b)^x = a^x.b^x$ $\quad \left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$ $\quad a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$ $\quad a^{\frac{x}{y}} = \sqrt[y]{a^x}$

Goniometrické funkcie:

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\quad \operatorname{tg} x = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

$\sin 2x = 2.\sin x.\cos x$ $\quad \cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \cos x$ $\quad \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) = \sin x$

x	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$
sin x	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
cos x	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

Trigonometria:

Sínusová veta: $\dfrac{a}{\sin\alpha} = \dfrac{b}{\sin\beta} = \dfrac{c}{\sin\gamma} = 2r$ $\quad$ Kosínusová veta: $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab.\cos\gamma$

Logaritmus: $\log_z(x \cdot y) = \log_z x + \log_z y$ $\quad \log_z \dfrac{x}{y} = \log_z x - \log_z y$

$\log_z x^k = k.\log_z x$ $\quad \log_y x = \dfrac{\log_z x}{\log_z y}$

Aritmetická postupnosť: $a_n = a_1 + (n-1).d$ $\quad s_n = \dfrac{n}{2}(a_1 + a_n)$

Geometrická postupnosť: $a_n = a_1.q^{n-1}$ $\quad s_n = a_1\dfrac{q^n - 1}{q-1},\ q \neq 1$

Kombinatorika: $P(n) = n!$ $\quad V(k,n) = \dfrac{n!}{(n-k)!}$ $\quad C(k,n) = \dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$

$P'(n_1, n_2, \ldots, n_k) = \dfrac{n!}{n_1!\,n_2!\ldots n_k!}$ $\quad V'(k,n) = n^k$ $\quad C'(k,n) = \dbinom{n+k-1}{k}$

Geometrický priemer: $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$ $\quad$ Harmonický priemer: $\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1} + \dfrac{1}{a_2} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}}$

Analytická geometria:

Parametrické vyjadrenie priamky: $X = A + t\vec{u}$, $t \in R$

Všeobecná rovnica priamky: $ax + by + c = 0$; $[a; b] \neq [0; 0]$

Uhol vektorov: $\cos\varphi = \dfrac{\vec{u}.\vec{v}}{|\vec{u}|.|\vec{v}|}$

Všeobecná rovnica roviny: $ax + by + cz + d = 0$; $[a; b; c] \neq [0; 0; 0]$

Stredový tvar rovnice kružnice: $(x - m)^2 + (y - n)^2 = r^2$

Objemy a povrchy telies:

	kváder	valec	ihlan	kužeľ	guľa
objem	abc	$\pi r^2 v$	$\frac{1}{3}S_p v$	$\frac{1}{3}\pi r^2 v$	$\frac{4}{3}\pi r^3$
povrch	$2(ab + ac + bc)$	$2\pi r(r + v)$	$S_p + Q$	$\pi r(r + s)$	$4\pi r^2$